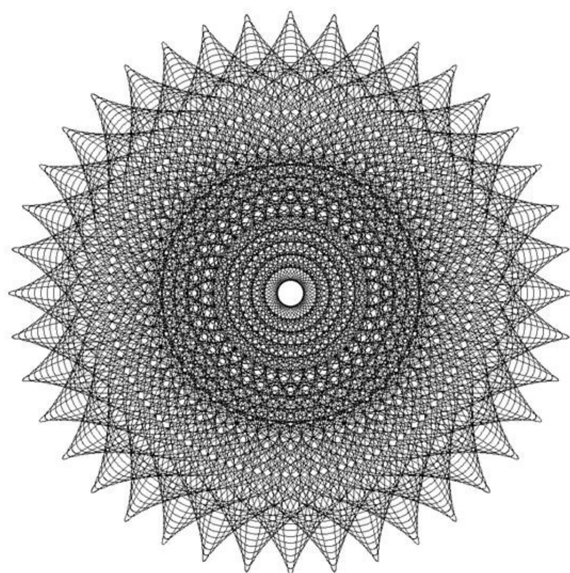


Análise Matemática I

Adérito Luís Martins Araújo

Notas de apoio às aulas de Análise Matemática I da Licenciatura em Física, do Mestrado Integrado em Engenharia Física e do Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, no ano lectivo de 2018/2019.

· U  C ·

FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Figura da capa: "Elipse Lace", de Susan McBurney, 2005.
Fonte: www.bridgesmathart.org/art-exhibits/jmm09/mcburney.html.

Conteúdo

Capítulo 1

Funções reais de variável real

1.1 Definição de função

Fenómenos naturais, como o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a acção do calor, a passagem de uma corrente eléctrica num condutor, a germinação de uma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc, são regidos, normalmente, por leis que podem ser de dois tipos: leis qualitativas ou leis quantitativas. Estes dois tipos de leis não podem ser rigidamente separados; a utilidade da distinção está em que a lei acentua, por vezes, um ou outro aspecto da realidade. Vejamos alguns tipos de leis.

Primeira lei de Johannes Kepler (1571–1630). Cada planeta descreve, em torno do Sol, uma elipse da qual o Sol ocupa um dos focos.

Lei da gravitação de Isaac Newton (1642–1727). Entre dois corpos desenvolve-se uma força atractiva que é directamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

Primeira lei da Psicologia Funcional de Édouard Claparède (1873–1940). Toda a necessidade tende a provocar reacções próprias e dar-lhes satisfação.

Lei da queda dos graves de Galileu Galilei (1564–1642). Para todo o corpo em queda livre no vácuo, as alturas de queda são inversamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda.

Destas quatro leis, a primeira e a terceira podem ser consideradas leis qualitativas, enquanto que a segunda e a quarta são consideradas leis quantitativas.

Na maioria das leis, o tipo dominante, é qualitativo ou quantitativo? A história da ciência dá a essa pergunta uma resposta nítida: à medida que a realidade se vai conhecendo melhor, o primado tende a pertencer ao tipo quantitativo. Não é a ciência, no seu avanço, que tende a pôr de parte a qualidade. Isso seria absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos seres uns com os outros, e a interdependência é, precisamente, uma das características essenciais da realidade. Mas a ciência não se ocupa apenas a descrever, empreende também a tarefa de explicar e, nesta, há um facto que se impõe com uma força cada vez maior: para se obter as explicações para as variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade.

É natural que, de coisa tão importante para o entendimento da realidade como é a lei quantitativa, surja também o conceito próprio para o seu estudo. Em que consiste, afinal, a lei? Na forma de correspondência entre conjuntos. Se, por consequência, queremos

estudar leis quantitativas, temos que "criar" um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

A primeira coisa a fazer, para tornar esse instrumento facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos e a totalidade dos seus elementos.

Definição 1.1 (Variável). *Seja A um conjunto qualquer, finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer um dos seus elementos por um símbolo, por exemplo x. A esse símbolo, representativo de qualquer dos elementos de A, chamamos* variável *e a A o seu* domínio.

Voltemos ao exemplo da lei da queda dos graves. Como foi dito, esta consiste na correspondência do conjunto dos tempos para o conjunto dos espaços. Seja t a variável do conjunto dos tempos T e s a variável do subconjunto S do conjunto dos espaços E, correspondência que sabemos unívoca, no sentido $t \mapsto s$ (a cada t corresponde um e um só s). Diremos que a variável s é uma função da variável t e escrevemos, simbolicamente, $s = f(t)$.

Definição 1.2 (Função). *Seja x uma variável representativa de um conjunto D e y uma variável representativa de um conjunto $C_d \subseteq C_c$. Diz-se que y é* função *de x, e escreve- -se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existir uma correspondência unívoca no sentido $x \mapsto y$. Usa-se também a notação*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & C_c \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

A x chama-se variável independente, *a y* variável dependente, *ao conjunto D chama-se* domínio *de f, a C_c* conjunto de chegada *e a*

$$C_d = \{f(x) : x \in D\}$$

chama-se contradomínio.

Não se deve confundir f com $f(x)$ pois enquanto f é uma função, $f(x)$ é apenas o valor que a função f assume no ponto x. Por vezes afirma-se: "seja f a função definida por $f(x) = \cdots$" ou até "seja $f(x) = \cdots$ a função ...". São abusos de linguagem que iremos cometer ao longo do curso.

Simbolicamente temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} f : A \longrightarrow B \text{ é função} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x). \end{aligned}$$

Seja f uma função de domínio A e conjunto de chegada B. O gráfico de f é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{graf} f &= \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) : x \in A\}. \end{aligned}$$

Notemos que o gráfico de f é sempre o mesmo, qualquer que seja o conjunto B que contenha o contradomínio de f. A representação geométrica (ou gráfico) de f é qualquer representação geométrica dos pontos de $\operatorname{graf} f$. É fácil, raciocinando geometricamente, ver quando é que uma figura é ou não a representação gráfica de alguma função.

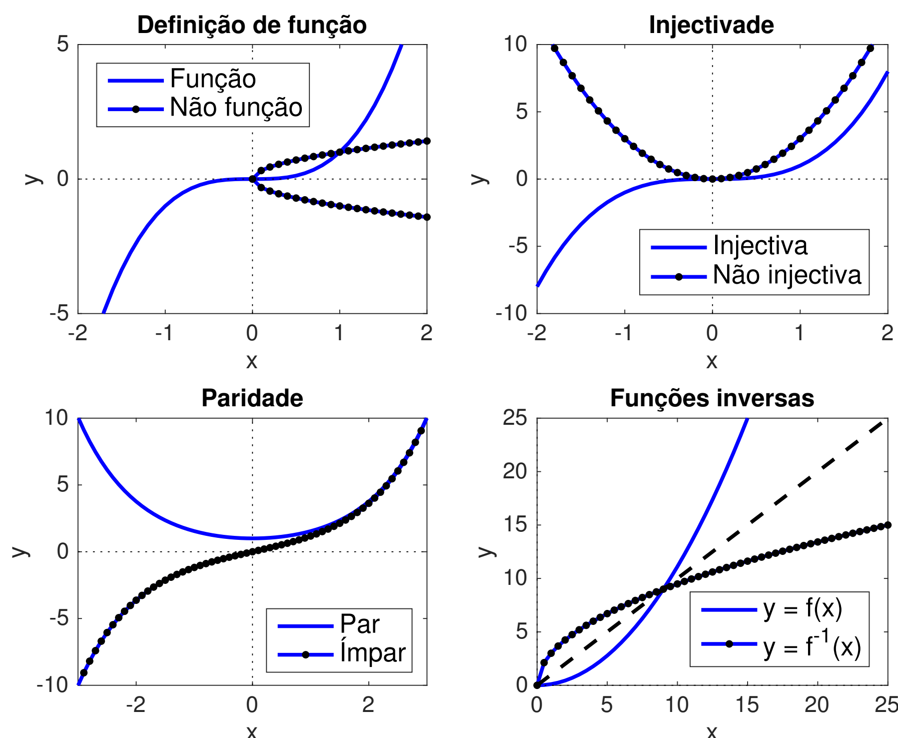


Figura 1.1: Tipos de funções.

1.2 Funções injectivas e sobrejectivas

Como já é sabido, uma função de domínio A é dita injectiva se a pontos diferentes do domínio A corresponderem imagens diferentes no conjunto de chegada. Simbolicamente temos:

$$\begin{aligned} f : A \longrightarrow B \text{ é injectiva } &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ &\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \end{aligned}$$

Em termos gráficos, a injectividade pode ser vista Figura 1.1.

Uma função de domínio A é dita sobrejectiva se qualquer ponto do conjunto de chegada pertencer ao contradomínio. Simbolicamente temos:

$$f : A \longrightarrow B \text{ é sobrejectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y.$$

Em termos gráficos não é possível concluir qual é o conjunto de chegada (só podemos saber qual o contradomínio) e, como tal, não é possível concluir da sobrejectividade de uma função.

1.3 Monotonia, paridade e periodicidade

Vamos, a partir de agora, considerar apenas funções reais de variável real, isto é funções reais de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$.

A função f diz-se crescente (estritamente crescente) se para todo o $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$. Do mesmo modo, f diz-se decrescente (estritamente

decrescente) se para todo o $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Uma função f diz-se constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo o x_1 e x_2 no seu domínio, e limitada se existir um $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todo o x pertencente ao seu domínio.

Outra noção importante é a de paridade. Diz-se que uma função f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ centrado na origem é par, se e só se, para todo $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ e ímpar se e só se, para todo o $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$. Notemos que se f é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy. Se f é ímpar, o seu gráfico é simétrico em relação à origem (ver Figura 1.1).

São muitas as aplicações práticas em que o conceito de periodicidade é relevante. Daí a importância da noção de função periódica. Uma função f é periódica em $D \subseteq \mathbb{R}$ se existir um $T \neq 0$ tal que, para todo o $x \in D$, $f(x + T) = f(x)$. Simbolicamente temos:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é periódica} \Leftrightarrow \exists T \neq 0 : \forall x \in D, f(x + T) = f(x).$$

A T nessas condições chama-se período da função f. Se T é um período positivo de f e é inferior a todos os outros períodos positivos de f, então a T chama-se período fundamental de f. Prova-se facilmente que se uma função f tiver período T então tem período kT, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se tivermos o gráfico de uma função periódica de período T, ele coincide com o gráfico da função que se obtém translaccionando a origem para o ponto $(kT, 0)$.

Seja f uma função definida num intervalo de amplitude T. A extensão periódica de f é a função f_p que satisfaz, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f_p(x + kT) = f(x), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Se uma função tiver período T podemos reduzi-la a uma função de período L através da mudança de escala

$$y = \omega x, \qquad \omega = \frac{L}{T}$$

e escrever f em termos de y: $f(x) = f(y/\omega)$.

Outra mudança de variável interessante consiste em transformar uma função definida num intervalo $[a, b]$ numa função definida num intervalo $[c, d]$. Essa mudança é efectuada por uma função ϕ tal que

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [a,b] & \longrightarrow & [c,d] \\ & x & \longmapsto & y = \phi(x). \end{array}$$

A forma mais simples de definir ϕ consiste em considerar a recta que passa pelos pontos (a, c) e (b, d). Essa recta é dada por

$$y = c + \frac{d - c}{b - a}(x - a).$$

Assim, se quisermos transformar uma função f definida no intervalo $[a, b]$, sendo x a variável que percorre esse intervalo, teremos que efectuar a mudança de variável

$$x = a + \frac{b - a}{d - c}(y - c)$$

e considerar

$$f(x) = f\left(a + \frac{b - a}{d - c}(y - c)\right).$$

1.4 Função inversa

Definição 1.3 (Função inversa). *Seja f uma função injectiva com domínio D e contradomínio C_d. Uma função g de domínio C_d e contradomínio D diz-se* inversa *de f se*

$$f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in C_d$$

e

$$g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D.$$

Notemos que, para que a função inversa de f esteja bem definida, f tem que ser sobrejectiva e injectiva. De facto, se f não fosse injectiva isso queria dizer que existiam $x_1 \neq x_2 \in D$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Mas isso seria equivalente a afirmar que existiria $y \in C_d$ tal que $g(y) = x_1 \neq x_2 = g(y)$, o que contraria o facto de g ser uma função. Logo, para que uma função tenha inversa, ela tem que ser bijectiva.

Uma função que tenha inversa diz-se invertível. Se uma função for invertível, então tem uma única inversa que é representada por f^{-1}. Para que f^{-1} exista é necessário que a cada $y \in C_d$ corresponda um e um só elemento $x \in D$ (correspondência biunívoca).

Analisemos agora qual a relação existente entre os gráficos de f e de f^{-1}. Sabemos que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Assim, o ponto $P = (a, b)$ está no gráfico de f se e só se $Q = (b, a)$ está no gráfico de f^{-1}. Podemos então dizer que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos um do outro em relação à recta $y = x$ (ver Figura 1.1). Podemos também pensar de outra maneira. Se "trocarmos os papéis" do eixo dos xx com o eixo dos yy, passamos do gráfico de uma função f para o gráfico da sua inversa (caso exista).

Consideremos $f(x) = x^2$, com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}_0^+$. Resolvendo $y = x^2$ em ordem a x obtemos $x = \pm\sqrt{y}$. Esta função não é injectiva e, como tal, não possui inversa. No entanto, se considerarmos f definida em $\mathbb{R}_0^+$ obtemos a função injectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & y = x^2, \end{array}$$

cuja inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Podemos definir a seguinte regra para o cálculo da inversa: para determinar a inversa de uma função $y = f(x)$, tenta resolver-se a equação em ordem a x; se a solução é única, podemos definir a função inversa. Como teste para a invertibilidade de uma função temos o seguinte: uma função f só é invertível se cada linha horizontal intersectar o gráfico de f no máximo num ponto.

Mostra-se facilmente que se f é uma função invertível, estritamente monótona em $D \subseteq \mathbb{R}$, então f^{-1} também é estritamente monótona em $C_d = f(D)$ e o sentido da monotonia é o mesmo.

1.5 Mini-atlas de funções

Vamos, agora, rever algumas classes de funções de grande utilidade prática.

Funções polinomiais. Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ forem números reais, uma função polinomial tem a forma

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{array}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$. Como casos particulares das funções polinomiais temos a função constante ($n = 0$), a função linear ou afim ($n = 1$) e a função quadrática ($n = 2$).

Funções racionais. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios. As funções racionais são funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}. \end{array}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ onde Q não se anule.

Funções irracionais. Seja $P(x)$ um polinómio. As funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left(\sqrt[q]{P(x)}\right)^p, \end{array}$$

com $p, q \in \mathbb{N}$, são ditas irracionais. O seu maior domínio será $\mathbb{R}$, se q for ímpar, e $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$, se q for par.

Função exponencial. Se $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ então $a^{p/q}$, $a \in \mathbb{R}^+$, tem uma definição elementar. Se x é um número irracional então a definição de a^x pode ser dada como se segue: se $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ for o termo geral de uma sucessão de números racionais convergente para x, então a^x é o limite (que existe sempre) da sucessão de termo geral a^{x_n}. Temos assim que para todo o $a > 0$ é possível definir a função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa a^x.

Note-se que, quando $a > 1$ a função é estritamente crescente e quando $a < 1$ a função é estritamente decrescente (ver Figura 1.2). No caso $a = 1$ a função é, obviamente, constante. Quando a base da exponencial é o número de Napier, assim chamado em homenagem ao matemático John Napier (1550–1617), isto é, quando $a = e$, sendo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045\ldots,$$

temos a chamada função exponencial natural. O número de Napier é denotado por e em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), que foi o primeiro a estudar aprofundadamente as suas propriedades. A e também se chama, muitas vezes, número de Euler.

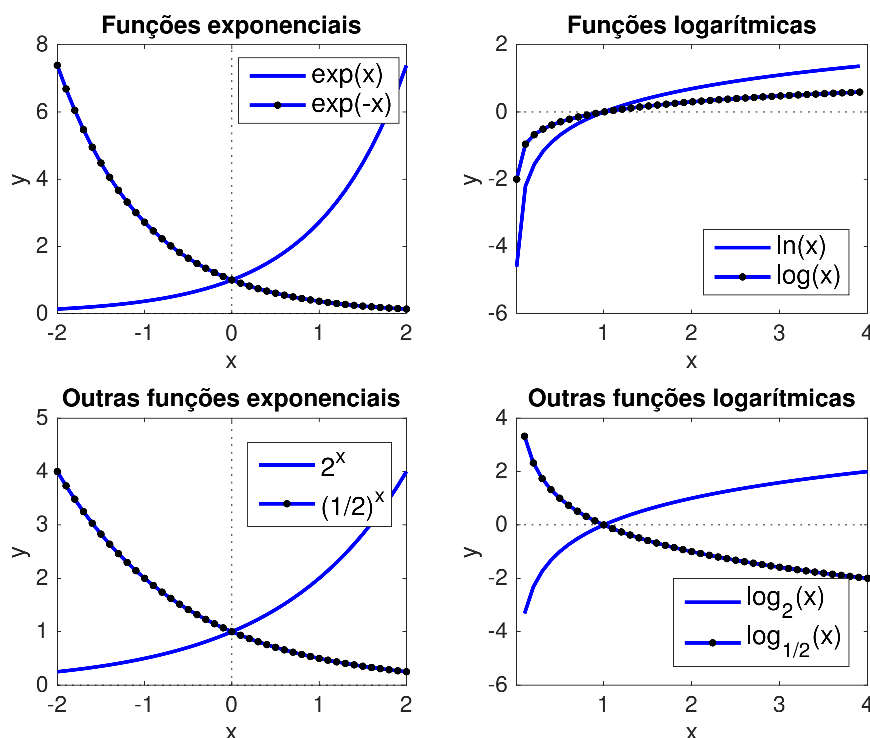


Figura 1.2: Funções exponenciais e logarítmicas.

A função exponencial natural também é denotada por $\exp(\cdot)$. Prova-se que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Lembremos as seguintes propriedades da função exponencial:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Função logarítmica. Como a função a^x, $a > 0$ e $a \neq 1$, é injectiva podemos definir a sua inversa na forma

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

função a que chamamos logaritmo na base a. Assim, a função logaritmo na base a é definida por

$$\begin{array}{rccc} \log_a: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a x, \end{array}$$

onde $\quad y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$

Como casos particulares temos a função logaritmo na base 10

$$y = \log x \Leftrightarrow 10^y = x$$

e a função logaritmo natural ou neperiano (base e)

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Recordemos as seguintes propriedades da função logaritmo:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^y = y\log_a x.$$

Recordemos, também, a fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

A Figura 1.2 dá-nos a representação gráfica da função logarítmica quando $a > 1$ e $a < 1$. Notemos que os gráficos são simétricos um do outro em relação ao eixo dos xx.

Funções $f(x)^{g(x)}$. As funções exponencial e logarítmica permitem definir a função $f(x)^{g(x)}$, com f e g duas funções. Por definição

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

onde e é o número de Euler. Isto significa que $f(x)^{g(x)}$ só está definida se $f(x) > 0$. Nalguns casos particulares que não exijam esta definição, como é o caso de $f(x)^{p/q} = \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p$, com p e q inteiros positivos, o domínio pode ser alargado.

Funções trigonométricas directas. Estas funções são de importância fundamental em todas as áreas científicas e tecnológicas. Pode provar-se, por exemplo, que, em certas condições, todas as funções periódicas se podem escrever como somas de senos e cossenos. As restantes funções trigonométricas podem ser definidas à custa das funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

As fórmulas fundamentais que relacionam a função seno com a função cosseno são:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \qquad \text{e} \qquad \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Outras fórmulas importantes são:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

A partir destas fórmulas, pode provar-se que:

1. (a) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$;
   (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$;
   (c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$;
   (d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$;
2. (a) $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$;
   (b) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$;
   (c) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.
3. $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

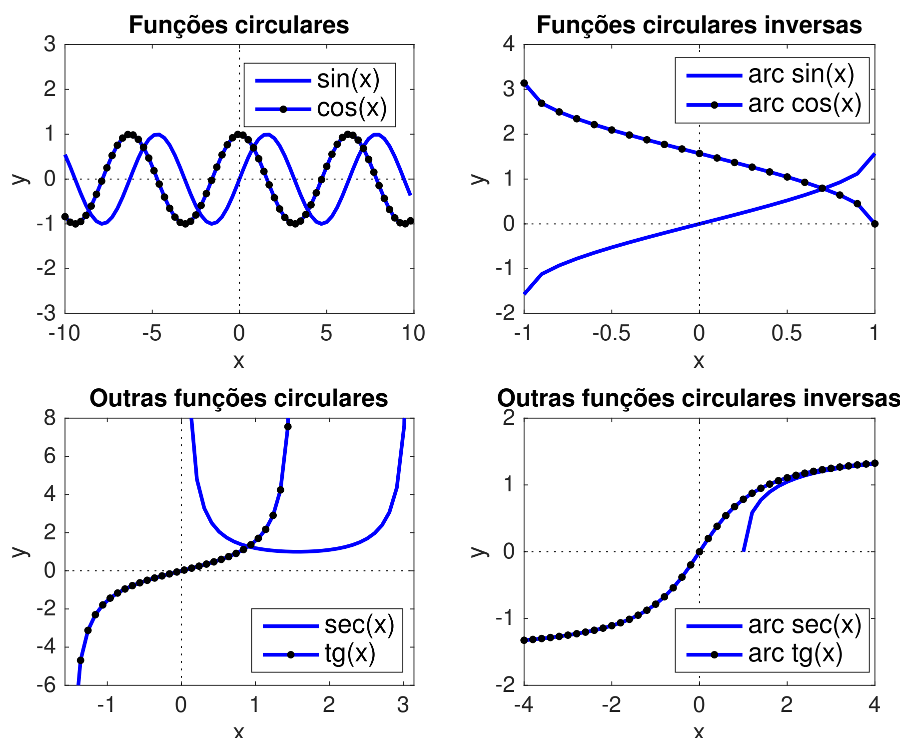


Figura 1.3: Funções trigonométricas directas e inversas.

Funções trigonométricas inversas. Como as funções trigonométricas directas não são injectivas, não podem ser invertidas no seu domínio. Assim, para definir a função inversa de uma função trigonométrica temos que considerar uma restrição desta função a um intervalo no qual possa ser considerada bijectiva.

Consideremos a função $y = \operatorname{sen} x$. Para que a função seno seja invertível, considera-se a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sendo a sua inversa a função arco cujo o seno ou, de forma abreviada, arco seno, definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arc sen}: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & y = \text{arc sen}\, x, \end{array}$$

onde $y = \text{arc sen}\, x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Consideremos a função $y = \cos x$. Pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, vamos considerar a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ e definir a função arco cujo o cosseno ou, de forma abreviada, arco cosseno, da forma

$$\begin{array}{rccl} \text{arc cos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & x & \longmapsto & y = \text{arc cos}\, x, \end{array}$$

onde $y = \text{arc cos}\, x \Leftrightarrow \cos y = x, \quad 0 \leq y \leq \pi$.

De igual modo se podem definir as funções inversas das funções tangente, cotangente, secante e cossecante:

1. $y = \text{arc tg}\, x \Leftrightarrow \text{tg}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;
2. $y = \text{arc cotg}\, x \Leftrightarrow \text{cotg}\, y = x, \quad 0 < y < \pi$;
3. $y = \text{arc sec}\, x \Leftrightarrow \sec y = x, \quad 0 < y < \pi$;
4. $y = \text{arc cosec}\, x \Leftrightarrow \text{cosec}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Existem fórmulas que relacionam as funções trigonométricas inversas. Por exemplo:

$$\text{arc tg}\, x = \text{arc sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{arc cosec}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right);$$

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x = \text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \text{arc cosec}\, x + \text{arc sec}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Funções hiperbólicas directas. As expressões exponenciais

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ocorrem com muita frequência nas aplicações da matemática às ciências e à engenharia. Nesse sentido, é útil atribuir-lhes uma designação específica. Por razões que não iremos explicitar, convencionou-se chamar função seno hiperbólico a

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

e função cosseno hiperbólico a

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função cosseno hiperbólico é usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, de densidade uniforme, cujas extremidades se encontram fixas à mesma altura. O problema de descrever matematicamente a forma da curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e sob a ação exclusiva da gravidade foi proposto por Galileu Galilei (1564–1642), que conjecturou que essa curva seria um arco de parábola. Aos 17 anos de idade, Christiaan Huygens (1629–1695) mostrou, em 1946, que a conjectura era falsa. Em 1690, Johann Bernoulli (1667–1748) relançou o problema à comunidade científica. A resolução do problema foi publicada independentemente em 1691 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Huygens e o próprio Bernoulli. A curva obtida

$$y = a\, \text{ch}\, \frac{x}{a}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

é chamada catenária (da palavra latina *catena* que significa corrente).

A chamada fórmula fundamental da trigonometria hiperbólica resulta imediatamente das definições das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico e é dada por:

$$\text{ch}^2\, x - \text{sh}^2\, x = 1.$$

Também se prova facilmente que:

$$\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, y\, \text{ch}\, x \quad \text{e} \quad \text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y.$$

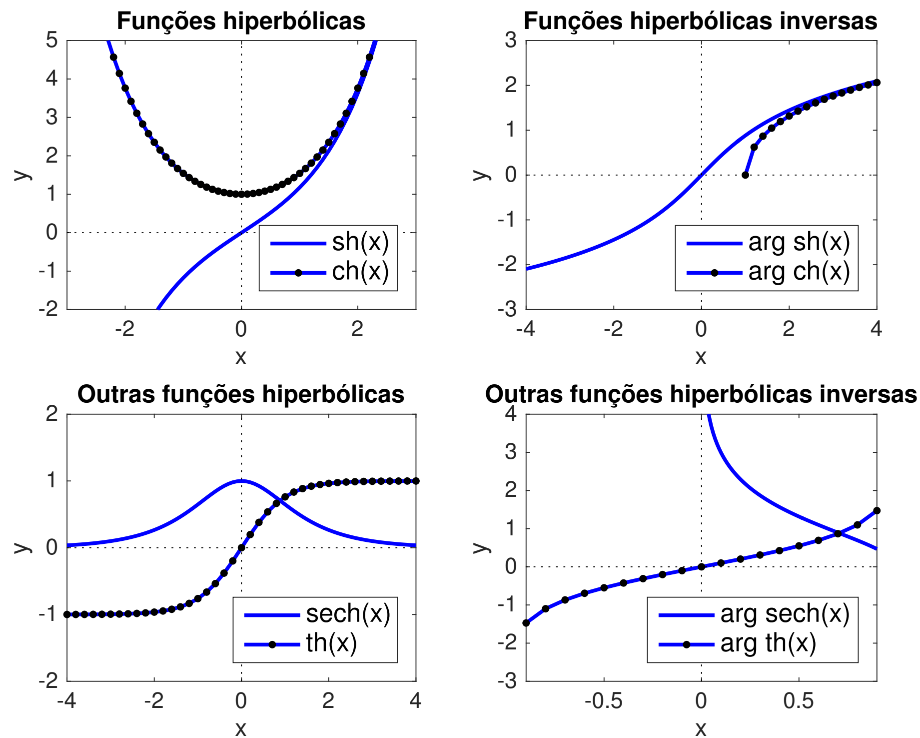


Figura 1.4: Funções hiperbólicas directas e inversas.

Tal como para as funções circulares, podemos também definir a função tangente hiperbólica, a função cotangente hiperbólica, a função secante hiperbólica e a função cossecante hiperbólica da seguinte forma:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Funções hiperbólicas inversas. Podemos também definir as funções hiperbólicas inversas.
Como a função seno hiperbólico é injectiva, a sua inversa é definida como sendo a função argumento seno hiperbólico dada por

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{sh} : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \arg \operatorname{sh} x, \end{aligned}$$

onde $\quad y = \arg \operatorname{sh} x \Leftrightarrow \operatorname{sh} y = x.$

Como a função cosseno hiperbólico não é injectiva, considera-se a sua restrição ao intervalo $\mathbb{R}_0^+$, e define-se a sua inversa como sendo a função argumento cosseno hiperbólico dada por

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{ch} : \ [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto y = \arg \operatorname{ch} x, \end{aligned}$$

onde $\quad y = \arg \operatorname{ch} x \Leftrightarrow \operatorname{ch} y = x, \quad y \in \mathbb{R}_0^+.$

De igual modo se podem definir as funções inversas das funções tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica, secante hiperbólica e cossecante hiperbólica:

1. $y = \arg \operatorname{th} x \Leftrightarrow \operatorname{th} y = x$;
2. $y = \arg \coth x \Leftrightarrow \coth y = x, \quad y \neq 0$;
3. $y = \arg \operatorname{sech} x \Leftrightarrow \operatorname{sech} y = x, \quad 0 \leq y$;
4. $y = \arg \operatorname{cosech} x \Leftrightarrow \operatorname{cosech} y = x, \quad y \neq 0$.

Pode provar-se que:

1. (a) $\arg \operatorname{sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
   (b) $\arg \operatorname{ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$.
2. (a) $\arg \operatorname{th} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| < 1$;
   (b) $\arg \coth x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| > 1$;
   (c) $\arg \operatorname{sech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$;
   (d) $\arg \operatorname{cosech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.
3. (a) $\arg \operatorname{sh} x = \operatorname{sgn}(x) \arg \operatorname{ch}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \arg \operatorname{th}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
   (b) $\arg \operatorname{ch} x = \arg \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$.

1.6 Curvas em coordenadas paramétricas e em coordenadas polares

Suponhamos que temos uma curva no plano cartesiano xy que não é intersectada em mais do que um ponto por qualquer recta vertical $x = c$. Esta curva, como se sabe, é a representação geométrica de uma função de expressão $y = f(x)$, $x \in I \subseteq D_f$, com D_f o domínio de f. No entanto, curvas como a circunferência ou a elipse, por exemplo, não satisfazem esta condição. Para estes casos particulares, poderia pensar-se numa forma implícita, através de uma relação entre x e y do tipo $f(x, y) = 0$. Como é sabido, uma circunferência de centro na origem e raio r admite a representação implícita da forma $x^2 + y^2 = r^2$. Mas a representação implícita não é suficiente para abarcar todos os casos. Por outro lado, essa representação, nem sempre é a mais conveniente. Nesta secção vamos apresentar dois métodos para descrever curvas planas.

1.6.1 Curvas em coordenadas paramétricas

Sejam $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos P do plano para os quais existe pelo menos um real $t \in I$ tal que P pode ser definido em coordenadas cartesianas por $(f(t), g(t))$ chama-se curva em coordenadas paramétricas. Essa curva pode ser representada por

$$\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}.$$

Às equações

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \qquad t \in I, \tag{1.1}$$

chamamos equações paramétricas da curva definidas à custa do parâmetro t.

Suponhamos que que a função $x = f(t)$ admite uma função inversa $t = f^{-1}(t)$ num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Neste caso, é evidente que y pode ser expresso como função de x na forma $y = g(f^{-1}(t))$, $t \in I$. Por exemplo, a curva em coordenadas paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}, \qquad t \in I,$$

tem por conjunto de pontos o gráfico da função g. Isto significa que tudo o que for dito para curvas em coordenadas paramétricas é, em particular, verdadeiro para gráficos de funções reais de variável real. O inverso, no entanto, não é verdadeiro.

As curvas dadas pelas equações paramétricas são frequentemente usadas na mecânica. Nesse caso, o parâmetro t é interpretado como sendo o tempo e a curva $\mathcal{C}$ como a trajectória no plano de um ponto material, isto é, a sua posição no plano ao longo do tempo.

Exercício 1.1. *Determine a equação da trajectória e o ponto de impacto de um corpo pesado lançado de um avião deslocando-se à velocidade horizontal v_0 à altitude y_0 (pode-se desprezar a resistência do ar).*

Resolução: Suponhamos que o corpo é largado do avião no instante $t = 0$. O deslocamento horizontal do corpo será um movimento uniforme à velocidade constante v_0, isto é

$$x = v_0 t.$$

O deslocamento vertical do corpo por acção da gravidade exprime-se pela fórmula

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

As duas equações anteriores definem as equações paramétricas da trajectória. Considerando, na primeira equação $t = \frac{x}{v_0}$ e substituindo na segunda, obtemos a equação da trajectória na forma

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2,$$

que é a equação de uma parábola cujo vértice é o ponto $(0, y_0)$ e o eixo de simetria coincidente com o eixo dos yy. Para determinar a abcissa x_i do ponto de impacto , resolve-se a equação

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x_i^2$$

e obtém-se $x_i = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$. □

Exercício 1.2. *Suponhamos um projéctil lançado com velocidade inicial de módulo* v_0 *segundo uma direcção que faz um ângulo* α *com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine a trajectória do projéctil e o ponto em que este atinge o solo.*

Resolução: Suponhamos que o projéctil é lançado no instante $t = 0$ e que, nessa altura se encontra no ponto $(0, 0)$. Como o vector velocidade inicial tem componente horizontal $v_0 \cos\alpha$ e componente vertical $v_0 \operatorname{sen}\alpha$, o deslocamento horizontal do projéctil é dado por

$$x = (v_0 \cos\alpha)t.$$

O deslocamento vertical tem que também ter em conta a acção da gravidade e é dado por

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Tal como no exercício anterior, é fácil de ver que a trajectória do projéctil é um arco de parábola. Para determinar a abcissa x_i do ponto de impacto, resolve-se primeiro a equação

$$0 = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t_i - \frac{gt_i^2}{2},$$

que nos dá o tempo

$$t_i = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

em que o projéctil atinge o solo e, finalmente, calcula-se a abcissa do ponto de impacto fazendo

$$x_i = (v_0 \cos\alpha)t_i = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen} 2\alpha. \quad \square$$

Notemos que as equações paramétricas de uma curva não são únicas. Por exemplo, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = z \\ y = \frac{z^2}{4} - 1 \end{cases}, \quad z \in [-2, 4], \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = w^3 \\ y = \frac{w^6}{4} - 1 \end{cases}, \quad w \in [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}],$$

representam a mesma curva.

Exercício 1.3. *Mostre que*

$$\begin{cases} x = (t-2)^2 \\ y = t - 2 \end{cases}, \quad t \in [0, 5], \qquad e \qquad \begin{cases} x = u^2 \\ y = u \end{cases}, \quad u \in [-2, 3],$$

representam a mesma curva.

Resolução: De facto, ambas as equações paramétricas definem a semi-parábola $x = y^2$, $y \in [-2, 3]$. $\square$

Vamos considerar a representação paramétrica de duas curvas importantes. A primeira é chamada astróide e é a curva traçada por um ponto situado numa circunferência de raio r que gira, sem deslizar, internamente a um círculo de raio $4r$ (ver Figura 1.5). As equações paramétricas do astróide são dadas por

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\,\text{sen}^3 t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi[.$$

Se elevarmos ambos os membros destas equações à potência $\frac{2}{3}$ e adicionando-os, obtemos

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}.$$

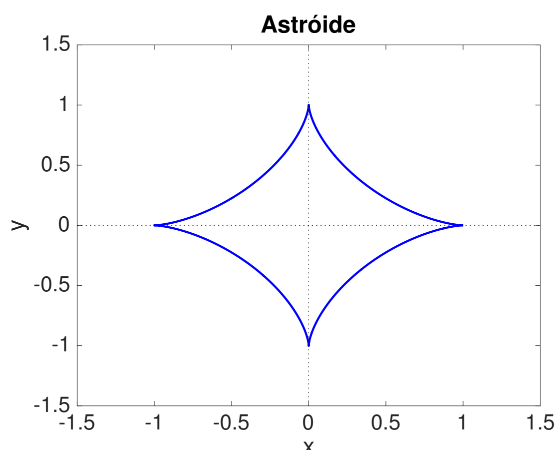


Figura 1.5: Astróide com $r = 1$.

A segunda é chamada ciclóide e é a curva traçada por um ponto situado numa circunferência de raio r que gira, sem deslizar, ao longo de uma linha recta (ver Figura 1.6). As equações paramétricas da ciclóide são dadas por

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen}\, t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A ciclóide é uma curva que possui duas propriedades surpreendentes e que contribuíram para dar resposta a alguns problemas célebres.

A curva tautócrona ou isócrona (do grego *tauto* – que significa, tal como *iso*, igual – e *chronos* – que significa tempo) é a curva ao longo da qual um corpo sem velocidade inicial e apens sujeito à força da gravidade chega a um ponto mais baixo sempre no mesmo intervalo de tempo, independentemente do seu ponto de partida. No século XVII, Christiaan Huygens (1629–1695), quando procurava construir relógios com precisão superior à daqueles que utilizavam pêndulos convencionais, descobre e demostra por processos geométrico que a ciclóide invertida é tautócrona. Por outras palavras, um pêndulo que se desloca ao longo de uma ciclóide invertida apresenta um período de oscilação que não depende da amplitude do movimento. A prova foi publicada em 1673 em seu célebre tratado *Horologium Oscillatorium*, o mais importante livro de mecânica escrito antes dos *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, de Isaac Newton (1642–1727), publicado em 1687.

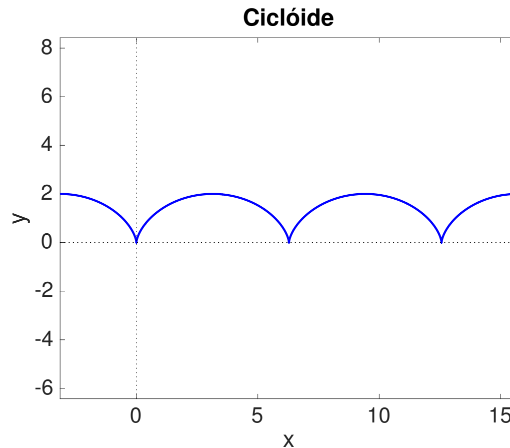


Figura 1.6: Ciclóide com $r = 1$ e $\theta \in [-\pi, 5\pi]$.

Outra surpreendente propriedade da ciclóide foi descoberta por Johann Bernoulli (1667–1748), em 1696, quando pesquisava o problema da braquistócrona (do grego *brakhisto* – que significa o mais curto – e *chronos* – que significa tempo), ou seja, o de encontrar a trajetória que minimiza o tempo gasto por um corpo, partindo do repouso e sujeito apenas à ação da gravidade, para ir de um ponto a outro, em níveis diferentes e não situados sobre a mesma vertical. Bernoulli descobriu que a curva braquistócrona é, também, um arco invertido de ciclóide. Entusiasmado, decidiu proclamar a sua descoberta na *Acta Eruditorum* de Leipzig, em Junho de 1696, e desafiar publicamente os melhores matemáticos do mundo, dando-lhes 6 meses para que apresentassem soluções para o problema, após o que ele publicaria sua própria. Em Janeiro de 1697, apenas Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) lhe comunicara ter chegado à solução, mas pedia um adiamento do prazo até à Páscoa para uma maior divulgação da questão junto do meio científico, o que terá sido aceite. Acabariam por ser apresentadas cinco soluções em 1697: a do próprio, a do seu tio Jakob Bernoulli (1654–1705), a de Leibniz, a de Marquis de l'Hospital (1661–1704) e uma, sob anonimato, no jornal da Royal Society (e que seria a de Isaac Newton, com este veio a reconhecer). Algum tempo depois, lendo-a, Johann Bernoulli não teve a menor dúvida de que somente um homem na Inglaterra teria sido capaz daquela façanha. Arrebatado pelo génio de Newton, consta-se que Bernoulli terá dito: "Pelas garras se conhece o leão".

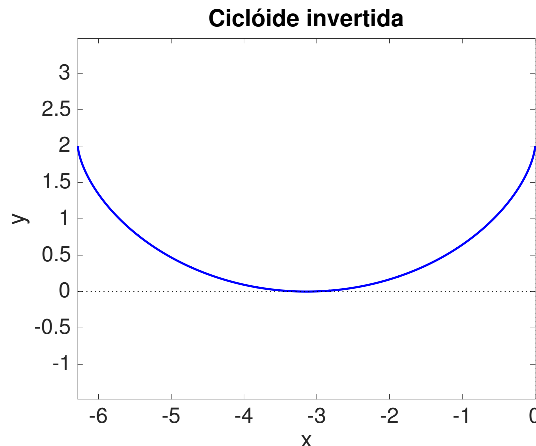


Figura 1.7: Ciclóide invertida: $x = -(t - \operatorname{sen} t)$, $y = -(1 - \cos t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

1.6.2 Curvas em coordenadas polares

Até ao momento para definir a posição de um ponto P no plano utilizámos as chamadas coordenadas cartesianas, que nos dão a posição de P em relação a um sistema de eixos coordenados. A abcissa e a ordenada de P são distâncias orientadas relativamente aos eixos coordenados. Vamos ver agora (à semelhança do que é feito para os números complexos) que é possível representar a posição de P num outro sistema de coordenadas, ditas coordenadas polares.

Fixemos um ponto $\mathcal{O}$ do plano, designado por pólo ou origem e uma semi-recta com origem em $\mathcal{O}$ designada por eixo polar. Depois de estabelecer uma unidade de comprimento, podemos associar a cada ponto P do plano um par (ρ, θ), onde ρ é a distância de $\mathcal{O}$ a P e θ é a medida do ângulo orientado, medido em radianos, cujo lado inicial é o eixo polar e o segundo lado a semi-recta de origem em $\mathcal{O}$ e que passa por P. Esta segunda semi-recta é chamada semi-recta θ. Como habitualmente, convencionaremos que valores positivos de θ são marcados no sentido anti-horário e que valores negativos são marcados no sentido horário.

O traçado de curvas em coordenadas polares simplifica-se se admitirmos que ρ possa tomar valores negativos. Para tal, há que dar uma definição precisa sobre o que se entende por (ρ, θ), com $\rho \in \mathbb{R}$.

Definição 1.4 (Coordenadas polares)**.** *O ponto P tem* coordenadas polares (ρ, θ) *se a distância de P à origem é $|\rho|$ e o ponto P se encontra sobre a semi-recta θ, se $\rho > 0$ ou sobre a semi-recta $\theta + \pi$, se $\rho < 0$.*

Notemos que, ao contrário do que acontece no sistema de coordenadas cartesianas, no sistema de coordenadas polares o mesmo ponto admite muitas representações. De facto, o ponto de coordenadas (ρ, θ) pode ser representado por qualquer um dos pares $(\rho, \theta + 2\pi)$, $(\rho, \theta - 4\pi)$, $(-\rho, \theta + \pi)$, $(-\rho, \theta - 3\pi)$. No entanto, se considerássemos apenas valores não negativos para ρ e $0 \leq \theta < 2\pi$, então a cada ponto do plano, com excepção do pólo, corresponde um par bem determinado de números ρ e θ. Para o pólo $\rho = 0$ e θ é arbitrário.

Estabeleçamos agora a relação entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas. Suponhamos que a origem do sistema ortonormado de coordenadas cartesianas xy coincide com o pólo e o sentido positivo dos xx com o eixo polar, sendo considerada a mesma unidade de comprimento. Se o ponto P tiver coordenadas polares (ρ, θ), as coordenadas cartesianas são tais que

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho},$$

ou seja

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Para $\rho > 0$ a propriedade anterior é óbvia mas, para $\rho < 0$ ela também se verifica. Inversamente, se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y), então

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Exercício 1.4. *Represente* $(\rho, \theta) = (2, \frac{\pi}{3})$ *em coordenadas cartesianas.*

Resolução: Temos que $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ e $y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. □

Exercício 1.5. *Represente* $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ *em coordenadas polares.*

Resolução: Se escolhermos $\rho > 0$ temos que $\rho = 2$. Então

$$\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Como o ponto está no segundo quadrante, se escolhermos $\theta \in [0, 2\pi[$, temos $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Para $\rho = -2$ e $\theta \in [0, 2\pi[$, deveremos considerar $\theta = \frac{5\pi}{3}$. □

O exemplo anterior mostra que, quando se pretende passar de coordenadas cartesianas para polares há que prestar atenção ao quadrante em que o ponto se encontra.

Definição 1.5 (Curva em coordenadas polares)**.** *Uma* curva em coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ *ou, mais genericamente,* $F(\rho, \theta) = 0$ *é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm pelo menos pelo menos uma representação* (ρ, θ) *cujas coordenadas satisfazem a equação.*

Note-se que uma curva em coordenadas polares da forma $\rho = f(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, pode ser escrita em coordenadas paramétricas na forma

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercício 1.6. *Exprima em coordenadas polares a equação das curvas:*

1. $x = 2$; *2.* $x^2 + y^2 = 1$; *3.* $x^2 - y^2 = 4$; *4.* $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Resolução: Para a primeira curva temos que $\rho\cos\theta = 2$, para a segunda $\rho^2 = 1$ e para a terceira $\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 4$, o que é equivalente a escrever $\rho^2\cos(2\theta) = 4$. Finalmente, para a quarta equação, que representa uma circunferência de raio 1 centrada no ponto $(1, 0)$, tem-se $\rho(\rho - 2\cos\theta) = 0$, o que é equivalente a escrever $\rho = 2\cos\theta$. □

Exercício 1.7. *Identifique as seguintes curvas expressas em coordenadas polares e escreva as suas equações em coordenadas cartesianas: 1.* $\rho = 2$*; 2.* $\theta = 1$*; 3.* $\rho = \operatorname{sen}\theta$*.*

Resolução: Como ρ representa a distância do ponto genérico da curva à origem, a primeira equação, $\rho = 2$, representa, obviamente, uma circunferência centrada na origem com raio 2, isto é, a curva dada (implicitamente) pelas coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = 4$. A segunda curva contém todos os pontos (ρ, θ) com $\theta = 1$ e, como tal, representa a recta que passa pela origem e que forma o ângulo de 1 radiano com o eixo polar. A sua equação em coordenadas cartesianas é $y = \operatorname{tg} 1\ x$. Finalmente, para a curva $\rho = \operatorname{sen}\theta$, como $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$, tem-se que

$$\rho = \frac{y}{\rho} \Leftrightarrow \rho^2 = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

que representa a circunferência de centro em $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$. □

Exercício 1.8. *Mostre que a curva* $\rho = 1/(1 + e\cos\theta)$ *corresponde à secção cónica com* excentricidade e*: circunferência se* $e = 0$*, elipse se* $0 < e < 1$*, parábola se* $e = 1$ *e hipérbole se* $e > 1$*.*

Resolução: O caso $e = 0$ já foi considerado. Os restantes casos são deixados como exercício e os gráficos podem ser vistos na Figura 1.8. □

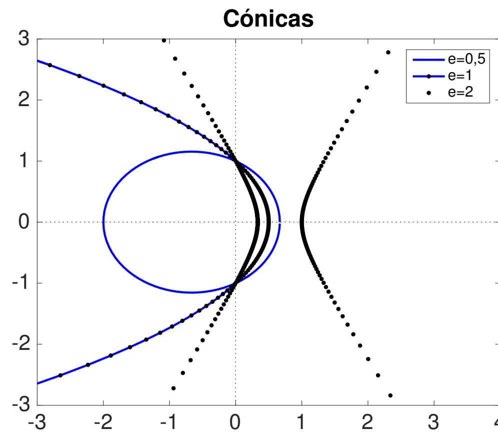


Figura 1.8: Cónicas correspondente ao Exercício 1.8.

Exercício 1.9. *Identifique a curvas expressa em coordenadas polares por* $\rho = \theta$, $\theta \geq 0$.

Resolução: A curva contém os pontos da forma (ρ, ρ), $\rho \geq 0$, ou seja os pontos do plano tais que a sua distância ao pólo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento que o liga à origem. Esta curva tem o nome de espiral de Arquimedes, em homenagem ao matemático, físico, engenheiro, inventor e astrónomo grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C.–212 a.C.). Note-se que $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ representam o mesmo ponto mas só o primeiro satisfaz a equação da espiral. A expressão geral da espiral de Arquimedes é dada por $\rho = a + b\theta$, com $\theta \geq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

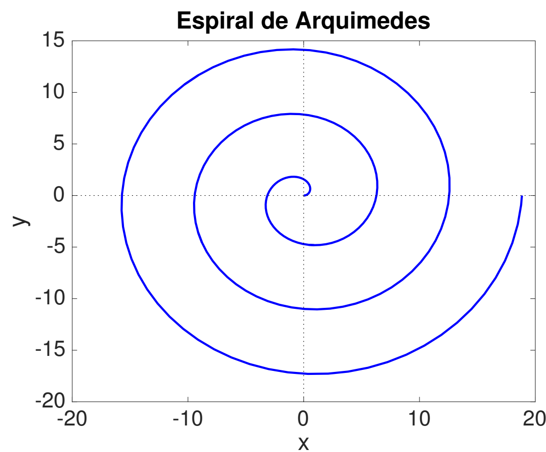


Figura 1.9: Espiral de Arquimedes $\rho = \theta$, $0 \leq \theta \leq 6\pi$.

Certas curvas têm equações mais simples em coordenadas polares do que em coordenadas cartesianas (por exemplo, a circunferência). Daí o interesse do estudo do seu traçado gráfico. Dada uma equação polar da forma $F(\rho, \theta) = 0$, traçar a curva correspondente consiste em representar geometricamente o conjunto

$$\mathcal{C} = \{(\rho, \theta) : F(\rho, \theta) = 0\}.$$

Note-se que a diferentes pares ordenados de $\mathcal{C}$ pode corresponder o mesmo ponto no plano. Esta observação permite pensar em representar a curva fazendo variar o parâmetro θ em intervalos mais restritos do que os impostos pelas expressão de F. Por exemplo, se $F(\rho, \theta + 2\pi) = \lambda F(\rho, \theta)$, com $\lambda \neq 0$, para todo o ρ e todo o θ, então basta tomar $\theta \in [0, 2\pi[$; se $F(-\rho, \theta + \pi) = \lambda F(\rho, \theta)$, com $\lambda \neq 0$, para todo o ρ e todo o θ, então basta tomar $\theta \in [0, \pi[$.

Muitas vezes, para traçar algumas curvas, ajuda estudar as suas eventuais simetrias. Para isso, é útil considerar o seguinte teste de simetria. Seja $\mathcal{C}$ uma curva de equação $F(\rho, \theta) = 0$.

1. Se a equação polar não mudar quando θ é substituído por $-\theta$ (ou quando ρ é substituído por $-\rho$ e θ por $\pi - \theta$), a curva é simétrica em relação ao eixo polar.

2. Se a equação não mudar quando θ é substituído por $\pi - \theta$ (ou quando ρ é substituído por $-\rho$ e θ por $-\theta$), a curva é simétrica em relação à recta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. Se a equação não mudar quando θ é substituído por $\pi + \theta$ (ou quando ρ é substituído por $-\rho$), a curva é simétrica em relação ao pólo. Isto significa que a curva e a girarmos π radianos ao redor do pólo.

Exercício 1.10. *Estude as seguintes curvas quanto às suas simetrias e esboce os seus gráficos: 1.* $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$*; 2.* $\rho = \cos 2\theta$.

Resolução: Comecemos por considerar $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$. Neste caso, a curva tem equação polar

$$F(\rho, \theta) = \rho - 1 - \operatorname{sen}\theta.$$

Como

$$F(\rho, \theta + 2\pi) = \rho - 1 - \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \rho - 1 - \operatorname{sen}\theta = F(\rho, \theta),$$

basta estudar a curva para $\theta \in [0, 2\pi[$. Por outro lado,

$$F(\rho, \pi - \theta) = \rho - 1 - \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \rho - 1 - \operatorname{sen}\theta = F(\rho, \theta)$$

e, como tal, a curva é simétrica relativamente à recta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$. Assim sendo, poderemos considerar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. Determinando alguns pontos da curva, facilmente se chega ao gráfico do cardióide dado na Figura 1.10.

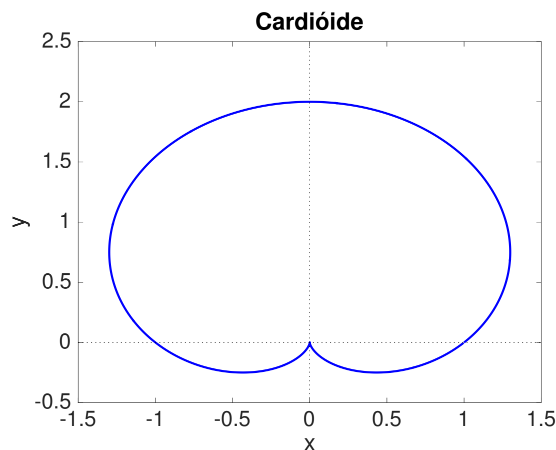


Figura 1.10: Cardióide $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

Consideremos agora a equação polar

$$F(\rho, \theta) = \rho - \cos 2\theta.$$

Como

$$F(\rho, \theta + 2\pi) = \rho - \cos 2(\theta + 2\pi) = \rho - \cos 2\theta = F(\rho, \theta),$$

basta estudar a curva para $\theta \in [0, 2\pi[$. Por outro lado,

$$F(\rho, \theta + \pi) = \rho - \cos 2(\theta + \pi) = \rho - \cos 2\theta = F(\rho, \theta)$$

e, como tal, a curva é simétrica relativamente ao pólo. Assim sendo, poderemos considerar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$. Temos ainda que

$$F(\rho, -\theta) = F(\rho, \theta)$$

e, como tal, a curva é simétrica relativamente ao eixo polar. Basta assim considerar o intervalo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e o resto da curva traça-se por simetria. Determinando alguns pontos da curva, obtemos o gráfico da **rosa de quatro pétalas** que pode ser visto na Figura 1.11. □

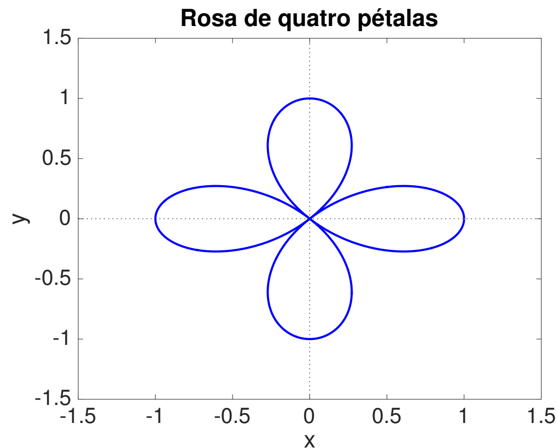


Figura 1.11: Rosa de quatro pétalas $\rho = \cos 2\theta$.

Um dos problemas mais complicados que se coloca quando trabalhamos com coordenadas polares é o da determinação dos pontos de intersecção de curvas. Já vimos que se pode ter $F(\rho, \theta) = 0$ e $F(\rho, \theta + 2\pi) \neq 0$ ou $F(-\rho, \theta + \pi) \neq 0$. Isto é, o ponto de coordenadas polares (ρ, θ) pode satisfazer a equação da curva sem que os seus pares $(\rho, \theta + 2\pi)$, etc, que representam o mesmo ponto no plano, satisfaçam a equação da curva.

Considere-se, por exemplo, a intersecção das curvas $\rho = r(1 - \cos\theta)$ e $\rho = r(1 + \cos\theta)$, com $r \neq 0$ (os dois cardióides representados na Figura 1.12 quando $r = 1$). Somando membro a membro vemos facilmente que $\rho = r$. Substituindo nas equações, concluímos que $\cos\theta = 0$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos como pontos de intersecção os pontos $\left(r, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Mas serão esses todos os pontos de intersecção? Note-se que $(0, 0)$ satisfaz $\rho = r(1 - \cos\theta)$ e $(0, \pi)$ satisfaz $\rho = r(1 + \cos\theta)$. Temos então que uma mesma representação do pólo não satisfaz as duas equações simultaneamente.

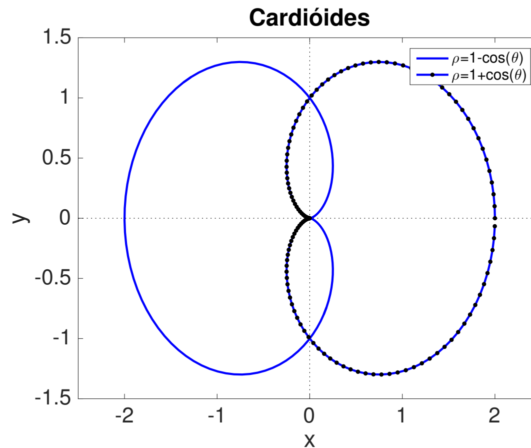


Figura 1.12: Intersecção de curvas em coordenadas polares.

1.7 Factores de escala*

Muitos aspectos da vida dos seres vivos são determinados pelas suas dimensões. É fácil encontrar exemplos que mostram que muitas propriedades biológicas dependem de grandezas geométricas, tais como o comprimento, área e volume. Vamos considerar alguns desses exemplos, seguindo, de muito perto, a referência [6].

Comecemos por analisar as relações de grandeza nos sólidos geométricos. Como é sabido, um cubo de aresta a tem como área da sua superfície $A = 6a^2$ e volume $V = a^3$. Numa esfera de raio r, temos que a área da sua superfície é dada por $A = 4\pi r^2$ e o seu volume por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Uma relação que salta imediatamente à vista, e que pode ser generalizada para todos os sólidos regulares, é a seguinte: se l representar a dimensão linear característica de um dado sólido regular (a medida da aresta, no cubo, e do raio, na esfera), temos que a sua superfície é proporcional ao quadrado de l e o seu volume ao seu cubo, isto é,

$$A = k_a l^2, \qquad V = k_v l^3, \qquad k_a, k_v \in \mathbb{R}.$$

Temos assim que a relação entre o volume e a superfície de um dado sólido é proporcional à dimensão linear característica desse sólido, ou seja,

$$\frac{V}{S} = kl, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

A aplicação destas Leis de Escala ao estudo de algumas características dos seres vivos revela-se de grande interesse. Se estivermos interessados em comparar propriedades ou funções de diversos organismos, ainda que de forma muito aproximada, podemos tomar como comprimento característico uma dimensão típica desse organismo. Por exemplo, no caso dos humanos, algumas grandezas que poderiam ser usadas como dimensão característica seriam a altura, o comprimento do braço ou da perna. Já no caso de uma célula, poder-se-ia pensar, em analogia com a esfera, no seu raio.

Robustez. Em condições normais o peso humano é proporcional ao seu volume, pelo que um aumento da altura numa pessoa (dimensão linear característica) implica um aumento do seu volume de um factor cúbico. Já quanto à força máxima que um ser humano consegue desenvolver, ela é proporcional ao quadrado da sua dimensão característica. A questão que se coloca é a seguinte: entre dois indivíduos com a mesma constituição física e alturas diferentes, quem tem mais robustez física?

Para isso, há necessidade de definir robustez. Por definição, a robustez é dada pela relação entre carga máxima levantada e o próprio peso, isto é,

$$F = \frac{\text{carga máxima que levanta}}{\text{peso próprio}} = \frac{C}{P}.$$

Consideremos dois atletas de constituição semelhante mas de alturas distintas $L_1 > L_2$. Como a constituição é semelhante, podemos assumir que a densidade de ambos é semelhante e, como tal, a sua massa específica ρ também é. Assim sendo, os seus pesos são dados por

$$P_1 = \rho V_1 g = \rho k_v L_1^3 g, \qquad P_2 = \rho V_2 g = \rho k_v L_2^3 g,$$

onde g representa a aceleração da gravidade e k_v a constante de proporcionalidade entre o volume e o comprimento característico.

Por outro lado, a carga máxima c que um animal é capaz de suportar é proporcional à área da secção recta dos seus músculos. Ora, a secção recta de um músculo pode ser aproximada por um círculo e o raio desse círculo é proporcional à dimensão linear característica. Assim sendo,

$$C_1 = k_c L_1^2, \qquad C_2 = k_c L_2^2,$$

onde k_c é a constante de proporcionalidade, considerada igual pois os atletas têm a mesma constituição física.

Podemos agora medir a robustez de ambos os atletas. Temos que

$$F_1 = \frac{k_c L_1^2}{\rho k_v L_1^3 g} = \frac{k}{L_1}, \qquad F_2 = \frac{k_c L_2^2}{\rho k_v L_2^3 g} = \frac{k}{L_2},$$

com

$$k = \frac{k_c}{\rho k_v g},$$

ou ainda

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Concluímos então que a robustez física é inversamente proporcional à altura e, como tal, ela é maior no atleta mais baixo.

Doses de fármacos. A administração de fármacos carece de precauções inerentes à sua própria natureza. A dose a administrar prende-se com a eficácia terapêutica que se pretende. No entanto, a determinação dessa dose tem em conta a massa corporal do indivíduo.

Consideremos uma criança com altura $L_c = 1$ m e um adulto com altura $L_a = 1{,}7$ m. A relação entre a altura da criança e a altura do adulto é

$$\frac{L_c}{L_a} = 0{,}59.$$

Se fosse esse o valor utilizado no cálculo da dose de um determinado fármaco a administrar a uma criança a partir da dose de um adulto cometer-se-ia um erro por excesso de aproximadamente três vezes.

A relação correcta a utilizar deve ser dada pelas massas. Se considerarmos que a massa específica da criança e do adulto são aproximadamente iguais, então a relação entre as suas massas pode ser aproximada pela relação entre os seus volumes que, por sua vez, são proporcionais aos cubos das suas alturas. Assim, o valor obtido para a relação entre os volumes e, consequentemente, para as doses de fármaco a administrar à criança é

$$\frac{V_c}{V_a} = \frac{k L_c^3}{k L_a^3} = \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^3 = \frac{1}{1{,}7^3} = 0{,}2.$$

Limitação das dimensões de uma célula. Suponhamos que uma célula em crescimento aumenta a sua dimensão característica (o seu raio) para o dobro entre dois instantes de tempo distintos. Por outras palavras, suponhamos que uma célula de raio R_1 no instante de tempo t_1 aumenta o seu raio para $R_2 = 2R_1$ no instante de tempo t_2.

As necessidades de oxigénio da célula são proporcionais à sua massa e ao seu volume mas a quantidade de oxigénio que atravessa a membrana celular depende, entre outros factores (natureza da membrana, diferenças de concentração entre o meio intra e extra celular), da área total da membrana. Assim, a relação entre a necessidade de oxigénio da célula entre os dois instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\frac{\text{necessidade de oxigénio no instante } t_2}{\text{necessidade de oxigénio no instante } t_1} = \frac{k_v R_2^3}{k_v R_1^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 8,$$

enquanto que a relação entre a quantidade de oxigénio que atravessa a célula entre os dois instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\frac{\text{quantidade de oxigénio no instante } t_2}{\text{quantidade de oxigénio no instante } t_1} = \frac{k_s R_2^2}{k_s R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 4.$$

Assim, a quantidade de oxigénio que é difundido para o interior da célula não acompanha o aumento da necessidade da célula.

Definindo o factor de viabilidade Z de uma célula pela relação

$$Z = \frac{\text{quantidade de oxigénio obtida por minuto}}{\text{necessidade de oxigénio por minuto}}$$

temos que

$$Z = \frac{k_s R^2}{k_v R^3} = \frac{k}{R},$$

sendo R o raio da célula num dado instante e k uma constante de proporcionalidade. Podemos, então, concluir que, à medida que a dimensão característica da célula aumenta, a sua viabilidade diminui.

1.8 Exercícios práticos

Exercício 1.11. *Identifique as seguintes definições e depois negue-as:*

1. $\exists\, l \in \mathbb{R} \;\wedge \exists\, L \in \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\; l < f(x) < L;$
2. $\forall x \in A \;\; \exists y \in B : f(x) = y \;\wedge\; \forall x_1, x_2 \in A,\; x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2);$
3. $\forall x_1, x_2 \in A,\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \;\wedge\; \forall y \in B \;\; \exists x \in A : f(x) = y;$
4. $\forall x_1, x_2 \in A,\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$
5. $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in V_\delta(x_0) \backslash \{x_0\},\; f(x) > f(x_0).$

Exercício 1.12. *Usando tabelas de verdade verifique 1 e 4. Em seguida prove 2 e 3.*

1. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A);$
2. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge A);$
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A);$
4. $(A \Rightarrow B) \not\Leftrightarrow (B \Rightarrow A).$

Exercício 1.13. *Simplifique as seguintes expressões, onde* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$*:*

1. $5^{2-\log_5 x};$
2. $3^{2\log_3(x+1)};$
3. $6^{3\log_6 2 - 2\log_6 3};$
4. $a^{(2-\log_a x)/3};$
5. $e^{-2\ln x^2};$
6. $a^{\log_a 2 + \log_a x};$
7. $\log \dfrac{10^{(x+1)^2 - x}}{\left(\frac{1}{10}\right)^x 100^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}};$
8. $\log_4\left(4^x \sqrt[x]{4}\right);$
9. $\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos\frac{3}{5});$
10. $\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2);$
11. $\operatorname{arc}\cos(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}).$

Exercício 1.14. *Determine o domínio de definição das seguintes funções:*

1. $f(x) = \dfrac{3x+1}{4-x};$
2. $g(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-5)};$
3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}};$
4. $i(x) = \sqrt{2+x-x^2};$
5. $j(x) = \ln(x^2-4);$
6. $k(x) = 3^{\operatorname{sen}(x+1)} - 2.$

Exercício 1.15. *Determine o domínio e a expressão analítica da aplicação* $g \circ f$*, sendo:*

1. $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1};$
2. $f(x) = \mid x \mid$ *e* $g(x) = \begin{cases} \log(x+1), & x > -1 \\ 0, & x = -1 \\ \frac{1}{x}, & x < -1 \end{cases}.$

Exercício 1.16. *Sejam* $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{7,8,9,10\}$ *e* $f : A \longrightarrow B$ *tal que*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. *Indique a restrição de* f *a* $\{1,2,3\}$.
2. *Indique os prolongamentos de* f *a* $\{1,2,3,4,5,10\}$.

Exercício 1.17. *Sendo* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ *e* $g(x) = 2x+3$, *determine os domínios e as expressões analíticas de:* 1. $f+g$; 2. $f \times g$; 3. f/g.

Exercício 1.18. *Determine o contradomínio de*

1. $1 + 2\cos x$; 2. $\operatorname{sen} x - 2$; 3. $\operatorname{tg} x + 1$; 4. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 5. $\operatorname{ch} x - 1$.

Exercício 1.19. *Representе graficamente as funções dadas por:*

1. $f_1(x) = \begin{cases} -x-5, & x < -4 \\ 2, & -4 \leq x < 2 \\ -2, & x \geq 2 \end{cases}$; 2. $f_2(x) = 1 + |x|$;

3. $f_3(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ -1, & -1 \leq x < 1 \\ x, & x \geq -1 \end{cases}$; 4. $f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1, \\ 1, & x \geq -1 \end{cases}$;

5. $f_5(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \wedge x \notin \mathbb{Z}_0^+ \\ 1, & x \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$.

Exercício 1.20.

1. *Sendo* $f(x) = \alpha x^2 + 5x + \alpha$, *determine* α *de modo que* $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. *Sendo* $f(x) = \beta x^2 + 3x + 2\beta + 1$, *determine* β *de modo que* $\sqrt{f(x)+2}$ *tenha por domínio* $\mathbb{R}$.

Exercício 1.21. *A partir do gráfico da função seno, cosseno ou tangente, represente graficamente as seguintes funções:*

1. $f(x) = |\cos(2x)|$; 2. $g(x) = |\operatorname{sen} x|$; 3. $h(x) = \cos|x|$;

4. $i(x) = 3\operatorname{tg} x$; 5. $j(x) = 2 + \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$; 6. $k(x) = 2\operatorname{sen}(\frac{x+\pi}{6})$.

Exercício 1.22. *Investigue quais das funções são pares e quais são ímpares:*

1. $y = |x+1|$; 2. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$; 3. $y = \sqrt{|1-x^2|}$; 4. $y = |\ln|x||$;

5. $y = \operatorname{sen} x^3$; 6. $y = e^{\cos x}$; 7. $y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; 8. $y = \cos(\operatorname{sen}(x))$;

9. $y = \operatorname{ch} x$; 10. $y = \operatorname{sh} x$; 11. $y = \operatorname{th} x$; 12. $y = \operatorname{sech} x$.

Exercício 1.23. *Diga, justificando, quais das seguintes funções são limitadas:*

1. $f(x) = x, \quad x \in [0, 126]$; 2. $g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$; 3. $h(x) = \dfrac{2}{\cos x - 7}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.24. *Determine o domínio, contradomínio, paridade e período fundamental de:*

1. $\operatorname{sen}(2x)$; 2. $\operatorname{tg}(3x)$; 3. $\cos^2 x$; 4. $2 - 2\operatorname{sen}(5x)$; 5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$.

Exercício 1.25. *Determine, se possível, a inversa de cada uma das seguintes funções:*

1. $y = 2x + 3$; 2. $y = 2 + \sqrt{x+1}$; 3. $y = \dfrac{2^x}{3} - 1$;

4. $y = \operatorname{arc\,tg} 3x$; 5. $y = \ln \dfrac{x}{2}$; 6. $y = \operatorname{ch} x$.

Exercício 1.26. *Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:*

1. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$; 2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$; 3. $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{3}{2x-4}$;

4. $\sqrt{3x+1} = 2x$; 5. $\sqrt{x+1} - 3 = \sqrt{x-2}$; 6. $e^{x+2} - 4x^2 e^x = 0$;

7. $\log_3 x = \dfrac{1}{2} + \log_9(4x+15)$; 8. $x \log(x+2) - x = 0$; 9. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$;

10. $7^x x^2 - 5x7^x + 6\ 7^x = 0$; 11. $(x^2-4)\log_3 x = 0$; 12. $2^{x^2-5x} = \dfrac{1}{64}$;

13. $\cos(2x) = 0$; 14. $2\operatorname{sen} x + \sqrt{3} = 0$; 15. $\operatorname{tg}(2x) = -1$;

16. $\operatorname{sen} x = \cos x$; 17. $\cos x = -\cos(2x)$; 18. $\operatorname{ch} x - 2 = \operatorname{sh} x$.

Exercício 1.27. *Resolva as seguintes inequações, em* $\mathbb{R}$*:*

1. $x^2 - 4 < 0$;
2. $\dfrac{x-3}{1-x} \geq 0$;
3. $-x^2 + 6x - 20 < 0$;
4. $| x^2 - 4 | \leq 1$;
5. $| x - 1 | > x$;
6. $| x - 1 | - | 2x + 4 | > 1$;
7. $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x} \geq 0$;
8. $(x^2 - 1)\log_2 x < 0$;
9. $(x - 13)\log_{\frac{1}{2}} x < 0$.

Exercício 1.28.

1. *Mostre que as equações*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \qquad e \qquad \begin{cases} x = r\operatorname{sen} u \\ y = r\cos u \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi],$$

são equações paramétricas da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

2. *Mostre que* $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$, *são equações paramétricas de uma semi-circunferência de centro na origem e raio* r.

Exercício 1.29.

1. *Mostre que as equações* $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, *são equações paramétricas da elipse de equação cartesiana* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. *Identifique a curva que se obtém quando se considera: (a)* $t \in [0, \pi]$*; (b)* $t \in [0, 4\pi]$.
3. *Defina outras equações paramétricas da elipse de equação cartesiana* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercício 1.30. *Elimine o parâmetro nas equações que se seguem e esboçe a curva que elas representam:*

1. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$;
2. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$;
3. $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$, $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}[$;
4. $\begin{cases} x = \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$, $t \in [0, \pi] \backslash \{\frac{\pi}{2}\}$;
5. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2\ln t \end{cases}$, $t \geq 1$;
6. $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 3 \end{cases}$, $t \in [0, 5]$.

Exercício 1.31. *Determine as coordenadas cartesianas dos pontos com as seguintes coordenadas polares: 1.* $(-2, 4\frac{\pi}{3})$*; 2.* $(2, -\frac{\pi}{2})$*; 3.* $(0, -\pi)$*; 4.* $(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$*; 5.* $(3, \pi)$.

Exercício 1.32. *Determine as coordenadas polares dos pontos definidos em coordenadas cartesianas por* $(-\sqrt{3}, -1)$ *e* $(1, -1)$ *de três formas com: 1.* $\rho \geq 0$ *e* $0 \leq \theta < 2\pi$*; 2.* $\rho \geq 0$ *e* $-\pi \leq \theta \leq \pi$*; 3.* $\rho \leq 0$ *e* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exercício 1.33. *Exprimindo-a em coordenadas cartesianas, identifique a curva:*

1. $\rho = 3$*; 2.* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$*; 3.* $\rho^2 \operatorname{sen}(2\theta) = 1$*; 4.* $\rho = 2a\cos\theta$*; 5.* $\rho = \dfrac{6}{2 - \cos\theta}$.

Exercício 1.34. *Esboce a região determinada em coordenadas polares pelas seguintes desigualdades:*

1. $1 \leq \rho \leq 2, \quad \cos\theta \leq 0$*; 2.* $-1 \leq \rho \leq 1, \quad \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Exercício 1.35. *Exprima em coordenadas polares as seguintes equações:*

1. $x^2 + y^2 = kx$*; 2.* $x = -3$*; 3.* $y = 3x$*; 4.* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Exercício 1.36. *Indique as simetrias principais das seguintes curvas:*

1. $\rho = 3$*; 2.* $\rho = -4\operatorname{sen}\theta$*; 3.* $\rho^2 = 4\cos\theta$*; 4.* $\rho = e^\theta$*; 5.* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercício 1.37. *Mostre que as curvas curvas polares seguintes correspondem a circunferências e trace o seu gráfico:*

1. $\rho = 2r\cos\theta$*; 2.* $\rho = -2r\cos\theta$*; 3.* $\rho = 2r\operatorname{sen}\theta$*; 4.* $\rho = -2r\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 1.38. *Esboce as curvas de equação:*

1. $\rho = a(1 - \cos\theta)$*; 2.* $\rho = 3(1 - \operatorname{sen}\theta)$*; 3.* $\rho = \cos(2\theta)$*;*

4. $\rho = \operatorname{sen}(3\theta)$*; 5.* $\rho = 4\theta, \quad \theta \leq 0$*; 6.* $\rho = -4\operatorname{sen}\theta$*;*

7. $\operatorname{sen}\theta = 1$*; 8.* $\rho = e^\theta, \quad \theta \geq 0$*; 9.* $\rho = \theta, \quad \theta \geq 0$.

Capítulo 2

Cálculo diferencial

2.1 Noção de limite de uma função

No ensino secundário é costume dar-se uma definição de limite recorrendo aos limites de sucessões. Essa é a chamada definição de limite segundo Heine, em homenagem ao matemático alemão Henrich Eduard Heine (1821–1881). Vamos agora introduzir uma definição alternativa, introduzida por Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), que é mais conveniente para demonstrar muitos resultados teóricos.

Definição 2.1 (Limite)**.** *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto $a \in \mathbb{R}$ (podendo não estar definida em a) e seja L um número real. Diz-se que o* limite *de $f(x)$ quando x tende para a é L e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se e só se, para todo o $\epsilon > 0$ podemos encontrar (pelo menos) um $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$ (D_f é o domínio de f), se $x \in]a - \delta, a + \delta[$ ($x \neq a$) então $f(x) \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Simbolicamente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

É importante referir que primeiro consideramos o intervalo arbitrário $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy e então, em segundo lugar, mostramos que existe, em D_f, um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ do tipo exigido.

Graficamente, temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se e só se, dado um intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy, existe um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ no eixo dos xx tal que as imagens dos pontos desse intervalo, excepto, possivelmente, a do ponto a, caiem no primeiro intervalo. Por outras palavras, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, consideram-se o intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy e as rectas horizontais $y = L \pm \epsilon$. Se existir um intervalo aberto $]a - \delta, a + \delta[$ tal que, para todo o x nesse intervalo, com possível excepção do ponto a, o ponto $P = (x, f(x))$ esteja entre as duas rectas horizontais, ou seja, no rectângulo definido pelas rectas $y = L \pm \epsilon$, $x = a \pm \delta$, então temos que $f(x) \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$ e, como tal,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Note-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) \neq L \quad &\Leftrightarrow \quad \sim [\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon] \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in D_f : 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon.\end{aligned}$$

Assim sendo, para provar que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é diferente de L, basta encontrar um $\epsilon > 0$ tal que não existe um $\delta > 0$ que verifique o pretendido. Notemos que, para provar que o limite de $f(x)$ quando x tende para a não existe, é preciso provar que a definição falha para qualquer valor de L.

Vamos, de seguida, apresentar alguns resultados importantes sobre limites. Estes resultados facilitarão a tarefa de calcular limites de funções. Muitos deles serão apresentados sem demonstração; estas podem ser consultadas em várias das referências bibliográficas apresentadas no final (por exemplo, [3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 13]).

No que se segue iremos considerar que as funções estão definidas em intervalos ou união de intervalos.

Teorema 2.1. *Se existir* $\lim_{x\to a} f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, *esse limite é único.*

Demonstração: A demonstração é feita por redução ao absurdo, isto é, supõem-se que existem $L_1 \neq L_2$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ e chega-se à conclusão que tal não pode acontecer. De facto, considerando um ϵ arbitrário tal que $\epsilon < (L_1 + L_2)/2$, tem-se que:

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$$

e

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Então, para $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tem-se que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_1 - \epsilon < f(x) < L_1 + \epsilon \\ L_2 - \epsilon < f(x) < L_2 + \epsilon \end{array} \right. ,$$

o que é absurdo pois $]L_1 - \epsilon, L_1 + \epsilon[\cap]L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon[= \emptyset$. □

Exercício 2.1. *Mostre que* $\lim_{x\to a} (\alpha x + \beta) = \alpha a + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolução: Consideremos $\alpha \neq 0$ (o caso $\alpha = 0$ é trivial) e façamos $f(x) = \alpha x + \beta$ e $L = \alpha a + \beta$. Fixando um $\epsilon > 0$ temos

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow |\alpha x + \beta - \alpha a - \beta| < \epsilon \Leftrightarrow |\alpha||x-a| < \epsilon.$$

Então, escolhendo $\delta = \epsilon/|\alpha|$ temos provado o pretendido. □

O resultado seguinte, apresentado sem demonstração, diz que se o limite de uma função for positivo, quando x tende para a, então a função tem que ser positiva num intervalo aberto contendo o ponto a.

Teorema 2.2. *Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, e $L > 0$ ($L < 0$), existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) para todo o $x \in]a-\delta, a+\delta[$, excepto, possivelmente, em $x = a$.*

Algumas regras práticas importantes para o cálculo de limites. Suponhamos que existem os limites $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$, $a \in \mathbb{R}$. Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$, se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, se n for um número inteiro e, no caso de n ser par $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Existem muitos teoremas importantes e úteis sobre limites. Iremos apenas apresentar dois deles sem, no entanto, efectuar a sua demonstração.

Teorema 2.3 (Funções enquadradas)**.** *Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo o x pertencente a um intervalo aberto contendo o ponto a, excepto, possivelmente, em a, e se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, então $\lim_{x\to a} h(x) = L$.*

Exercício 2.2. *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Resolução: Como

$$-x^2 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$$

e

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

então, pelo teorema anterior, $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$. $\square$

Teorema 2.4 (Função composta)**.** *Se f e g são funções tais que, para $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \qquad e \qquad \lim_{y\to b} f(y) = f(b) \quad (f \text{ contínua em } b),$$

então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Limites laterais. Um conceito importante é o de limite lateral. Por definição, diz-se que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a é L, e denota-se por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a é L, e denota-se por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tem-se que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Pode demonstrar-se, para os limites laterais, teoremas análogos aos da secção anterior, efectuando as devidas alterações.

Limites no infinito e limites infinitos. Existem casos em que o limite não existe mas em que é necessário caracterizar o comportamento assimptótico de uma função. Por exemplo, como caracterizar o comportamento de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x cresce indefinidamente? E quando x tende para zero?

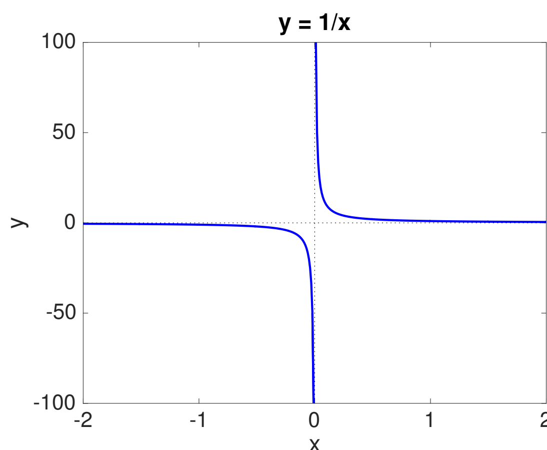


Figura 2.1: Hipérbole $y = 1/x$.

Para responder a estas questões, vamos apresentar os conceitos de limite no infinito e limite infinito.

Definição 2.2 (Limites no infinito e limites infinitos)**.**

Limites no infinito. *Seja f uma função definida num intervalo $]c, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Se f estiver definida num intervalo $] - \infty, c[\subseteq \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$, diz-se que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f, x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Limites infinitos. *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, podendo não estar definida em a. Diz-se que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

e que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Vejamos os significados geométricos destas definições. Comecemos por ver o caso dos limites no infinito. Traçamos as rectas $y = L \pm \epsilon$. Temos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se e só se quaisquer que sejam as rectas horizontais traçadas, for possível encontrar um valor de $M > 0$ tal que, para todo o $x > M$ os pontos $(x, (f(x))$ estão na região compreendida entre duas rectas.

Vejamos agora o caso dos limites infinitos. Traçamos a recta $y = M$. Temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se e só se qualquer que seja a recta horizontal traçada, podemos encontrar um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ tal que todos os pontos desse intervalo, com possível excepção do ponto a, são transformados por f em pontos por cima da recta.

Exercício 2.3. *Seja k um número racional positivo e c um número real arbitrário diferente de zero. Mostre que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0,$$

desde que x^k seja sempre definido.

Resolução: Vamos considerar apenas o caso em que $x \to +\infty$; o outro caso resolve-se de forma análoga. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pretende-se mostrar que

$$\exists M > 0 : \quad x > M \Rightarrow \left| \frac{c}{x^k} \right| < \epsilon.$$

Temos, sucessivamente que

$$\left|\frac{c}{x^k}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|x^k\right| > \frac{|c|}{\epsilon} \Leftrightarrow |x|^k > \frac{|c|}{\epsilon} \Leftrightarrow |x| > \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{1/k}.$$

Tomando $M = \left(\frac{|c|}{\epsilon}\right)^{1/k}$ temos que se $x > M$ então $\left|\frac{c}{x^k}\right| < \epsilon$, o que prova o pretendido. □

Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, $a \in \mathbb{R}$. Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = +\infty$ se $\alpha > 0$ e $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = -\infty$ se $\alpha < 0$;
2. se $L > 0$ então $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} (f(x)/g(x)) = +\infty$;
3. se $L < 0$ então $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} (f(x)/g(x)) = -\infty$;
4. $\lim\limits_{x\to a} (g(x)/f(x)) = 0$.

O teorema das funções enquadradas também pode ser usado para limites no infinito. Por exemplo, para calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \cos x}{x}$$

podemos começar por considerar

$$\frac{x-1}{x} \le \frac{x - \cos x}{x} \le \frac{x+1}{x}$$

e, uma vez que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

se verifica, usar o teorema das funções enquadradas para obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \cos x}{x} = 1$.

Temos, finalmente, o seguinte teorema, que apresentamos sem demonstração, para um tipo de limite infinito mas que também é válido para os restantes casos.

Teorema 2.5 (Função composta). *Se f e g são funções tais que, para $a, L \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{y\to+\infty} f(x) = L$$

então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L.$$

2.2 Funções contínuas

Ao chegarmos à definição de limite, enfatizámos a restrição $x \neq a$ e apresentámos exemplos que evidenciavam o facto de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ poder existir mesmo que a função não fosse definida em $x = a$. Vimos também casos em que f está definida no ponto a e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe mas é diferente de $f(a)$.

Definição 2.3 (Função contínua). *Uma função f, definida num intervalo aberto contendo o ponto a, é* contínua *em a se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se f não é contínua em a dizemos que é descontínua *em a ou que tem uma descontinuidade em a.*

Se uma função f é contínua em todos os pontos do intervalo $]a, b[$ (finito ou não), dizemos que f é contínua em $]a, b[$ e

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b),$$

isto é, se f é contínua em $]a, b[$ e contínua à direita em a e à esquerda em b dizemos que f é contínua em $[a, b]$.

Se f e g são funções contínuas em a, prova-se facilmente que também o são a combinação linear $\alpha f + \beta g$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o seu produto fg, o seu quociente f/g, se $g \neq 0$, e a sua raiz $\sqrt[n]{f}$, com a restrição $f(a) > 0$ se n é par.

Vejamos como resulta a aplicação do Teorema da função composta para o caso de ambas as funções serem contínuas. Como vimos, se f for contínua em a, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Se g também for contínua temos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)).$$

Vamos agora apresentar, sem demonstração, dois importantes resultados relativos a funções contínuas. O primeiro afirma que uma função real de variável real contínua aplica intervalos em intervalos e o segundo que toda a função contínua, definida num intervalo fechado, tem nesse intervalo um ponto de máximo e um ponto de mínimo.

Teorema 2.6 (Valor intermédio). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado um número y entre os valores de $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto intermédio $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = y$.*

Por outras palavras, o Teorema do Valor Intermédio diz que toda a função contínua, para passar de um valor para outro, tem que passar por todos os valores intermédios. Por outras palavras, o teorema anterior afirma que uma função real de variável real contínua aplica intervalos em intervalos. Um importante corolário deste teorema é devido ao matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia (actual República Checa) Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848) e é muito útil na localização de zeros de funções.

Corolário 2.7 (Bolzano). *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ então a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $]a, b[$.*

Note-se que, de acordo com o Teorema de Bolzano, se $f(a)f(b) < 0$ e a função for contínua em $[a, b]$, ela tem, nesse intervalo, um número ímpar de raízes.

O segundo resultado garante que toda a função contínua, definida num intervalo fechado, tem nesse intervalo um máximo e um mínimo absolutos. Antes de o apresentarmos, recordemos a seguinte definição.

Definição 2.4 (Extremos)**.** *Seja f uma função de domínio D e seja $c \in D$. O valor de $f(c)$ diz-se* máximo (mínimo) absoluto *de f se $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo o $x \in D$. O valor de $f(c)$ diz-se* máximo (mínimo) local *ou* relativo *de f se existe um intervalo aberto I contendo c tal que $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo o $x \in I$. O ponto c nestas condições diz-se um* maximizante (minimizante) absoluto *ou* local *de f.*

Enunciemos agora o importante teorema, devido ao matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

Teorema 2.8 (Weierstrass)**.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que, para todo o $x \in [a, b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.*

Note-se a importância de se considerar um intervalo fechado na definição anterior. De facto, se considerarmos a função $f(x) = 2x$ no intervalo $[-1, 2]$, ela tem máximo $M = f(2) = 4$ e mínimo $m = f(-1) = -2$. No entanto, a mesma função no intervalo $]-1, 2[$ não tem máximo nem mínimo.

Existem muitos "teoremas de Weierstrass". Outro, muito conhecido diz o seguinte: "Seja f uma função definida e contínua num intervalo $[a, b]$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um polinómio p definido em $[a, b]$ tal que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.\text{"}$$

Este teorema diz-nos que, por mais pequeno que seja o ε escolhido, existe sempre um polinómio p contido na faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]\}$. Por outras palavras, este resultado permite afirmar que todas as funções contínuas podem ser aproximadas, com a precisão desejada, por um polinómio. O que o teorema não diz é como se calcula esse polinómio.

Funções descontínuas. Vamos terminar esta secção com uma referência às funções descontínuas. Iremos destacar três tipos de descontinuidades que uma função f pode assumir.

Dizemos que f possui, em a, uma:

- descontinuidade removível se existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ mas é diferente de $f(a)$. Também se diz que f é prolongável por continuidade em a.
- descontinuidade de primeira espécie se existirem os limites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ mas são diferentes, isto é, não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.
- descontinuidade de segunda espécie se não existe, pelo menos, um dos limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

Seguem-se alguns exemplos de funções descontínuas: a função sinal

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases};$$

a função Heaviside

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases};$$

a função rectângulo

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 1/2, & |x| = 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases};$$

a função característica ("maior inteiro inferior ou igual a x")

$$\lfloor x \rfloor = n, \qquad n \leq x \leq n+1, \quad n \in \mathbb{Z};$$

a função mantissa ("parte decimal de x")

$$\mathrm{M}(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Algumas relações importantes entre estas funções são, por exemplo,

$$\Pi(x) = \mathrm{H}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{H}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad \operatorname{sgn}(x) = 2\mathrm{H}(x) - 1.$$

2.3 Função derivada

A propósito do "desenvolvimento em série"

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \cdots,$$

observa Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) no seu "Théorie des functions analytiques", 1798, pp 18-19: "Esta nova expressão tem a vantagem de mostrar que os termos da série dependem uns dos outros e, sobretudo como, desde que se forme a primeira função derivada de uma função primitiva qualquer, se podem formar todas as funções derivadas que a série contenha. Chamaremos à função $f(x)$ função primitiva em relação às funções $f'(x)$, $f''(x)$, etc, que derivam dela e às quais chamaremos funções derivadas em relação aquela". Foi nesse trabalho que surgiu, pela primeira vez, o termo derivada (de uma função).

Definição 2.5 (Derivada). *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a. O limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

quando existe chama-se derivada *de f no ponto a e denota-se por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. Se f tem derivada finita no ponto a, diz-se que f é* diferenciável *em a.*

À razão

$$f[x, a] := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

chama-se razão incremental. Então, podemos escrever $f'(a) = \lim_{x \to a} f[x, a]$.

Diz-se que uma função f é diferenciável num intervalo aberto, finito ou não, se o é para todos os pontos desse intervalo. Uma função f é diferenciável num intervalo fechado $[a, b]$ se é diferenciável em $]a, b[$ e se existirem as derivadas à direita de f em a e à esquerda em b, isto é, se existirem e forem finitos os limites

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Como é sabido, se f for uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, $f'(a)$ existe se e só se existirem e forem iguais as derivadas à esquerda e à direita de f em a.

Exercício 2.4. *Mostre que a função real de variável real definida por* $f(x) = \sqrt[3]{x^n}$, $n = 2, 3$, *não é diferenciável em* $x = 0$, *mas tem derivada* $+\infty$ *nesse ponto quando* $n = 1$ *e não tem derivada quando* $n = 2$.

Resolução: Quando $n = 1$ tem-se que

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

e, como tal, f não é diferenciável em $x = 0$ mas tem deriada $+\infty$ em nesse ponto. Quando $n = 2$ tem-se que

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

e, como tal, f não tem derivada em $x = 0$. Os gráficos das funções em causa neste exercício podem ser vistas na Figura 2.2. □

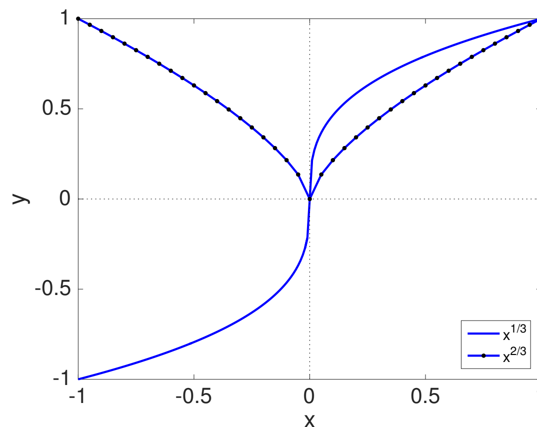


Figura 2.2: Figuras correspondentes ao Exercício 2.4.

Geometricamente, a derivada de uma função f num ponto a do seu domínio é o declive (ou coeficiente angular) da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa a. Sendo assim, a equação da **recta tangente à curva** $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

A **recta normal à curva** $y = f(x)$ no ponto de abcissa a tem declive $-1/f'(a)$ e, como tal, a sua equação é dada por

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Se $\lim_{x\to a} f[x, a] = \pm\infty$, não existe $f'(a)$ e a tangente à curva no ponto $(a, f(a))$ é vertical. Assim sendo, o gráfico de uma função diferenciável não tem tangentes verticais em nenhum ponto.

A derivada da função também pode ser interpretada como uma taxa de variação. Suponhamos que y é uma função dependente de uma variável independente x escrita na forma $y = f(x)$. Se x variar de x_1 para x_2, a variação de x (também chamada de **acréscimo** de x) é dada por $\Delta x = x_2 - x_1$ e a variação de y (também chamada **acréscimo** de x) é dada por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. À razão incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

chamamos **taxa de variação média** de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$. Geometricamente, a taxa de variação média é dada pelo declive da recta secante ao gráfico de f que passa nos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. A derivada, sendo o limite da taxa de variação média quando o acréscimo em x tende para zero, pode ser visto como uma **taxa de variação instantânea**.

Por exemplo, se um ponto material se mover ao longo de uma recta de acordo com a equação $s = f(t)$, onde s é o deslocamento do ponto a partir de um instante t inicial, a função f descreve a função de posição do ponto material. A velocidade instantânea do objecto no instante $t = a$ é dada por

$$f'(a) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t}.$$

Por outras palavras, a velocidade no instante $t = a$ é igual ao declive da recta tangente em $(a, f(a))$.

Seja $D_{f'}$ o maior intervalo (ou união de intervalos) de $\mathbb{R}$ onde f é diferenciável. Podemos definir a **função derivada** como sendo

$$\begin{array}{rccc} f': & D_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f'(x), \end{array}$$

onde

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f[x + h, x]$$

ou um limite lateral apropriado.

As notações mais frequentes para a derivada de $y = f(x)$ são

$$f', \quad y', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}.$$

Quando é preciso especificar o ponto onde a derivada é calculada usa-se

$$f'(a), \quad y'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}.$$

A notação $\frac{dy}{dx}$ é devida a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Apesar de parecer a razão entre duas quantidades dy e dx, ela representa um ente uno: o limite que surge na definição de derivada. A notação $f'(x)$ é devida a Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) e é a mais conveniente quando se pretende tratar a derivada como função. Quando a variável independente representa o tempo, também se usa a notação $\dot{y}$, atribuída a Isaac Newton (1642–1727).

Vamos agora apresentar alguns resultados úteis para o cálculo da derivada de uma função.

Sejam f e g duas funções diferenciáveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prova-se que:

1. $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(a) + \beta g'(b)$;
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. se $g(x) \neq 0$ então $(f(x)/g(x))' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Consideremos agora o seguinte resultado.

Teorema 2.9. *Se uma função é diferenciável num ponto ela é contínua nesse ponto.*

Demonstração: Seja f uma função real de variável real de domínio D_f, diferenciável, e seja $x \neq a$, com $x, a \in D_f$. Então

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}(x - a).$$

Tomando limites temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} \lim_{x\to a}(x - a) = f(a) + f'(a) \times 0 = f(a).$$

Logo, f é contínua em a. □

Notemos que, pelo teorema anterior, também podemos afirmar que se f não é contínua num ponto do seu domínio então f não é diferenciável nesse ponto. O recíproco do teorema anterior não é válido, isto é, existem funções contínuas que não são diferenciáveis. Em 1857, o matemático alemão Karl Weierstrass apresentou, pela primeira vez, um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ mas sem derivada em qualquer ponto de $\mathbb{R}$.

Na Figura 2.3 podemos ver um exemplo de uma função ($f(x) = |x|$) que não tem derivada no ponto $x = 0$ e uma função ($f(x) = x^2$) diferenciável em todo o $\mathbb{R}$. Note-se que, se o gráfico de f tem um vértice em $(a, f(a))$, então f não é diferenciável em a. Por outras palavras, quando o gráfico de f tem um vértice num ponto $(a, f(a))$, a derivada é descontínua nesse ponto.

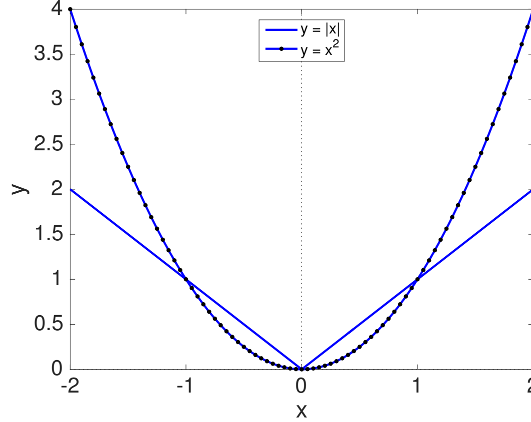


Figura 2.3: Função módulo e função quadrática.

É interessante o seguinte exemplo em que a função f é contínua (mas não é diferenciável) num ponto e não existem as derivadas laterais no ponto em questão:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

De facto, as derivadas laterais

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to \pm 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

não existem. No entanto, a função

$$g(x) = xf(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

é diferenciável em $x = 0$ e $g'(0) = 0$. A multiplicação por x tornou a função diferenciável e, além disso, alterou a paridade da função (de par a ímpar).

O resultado seguinte, de grande importância prática, é apresentado sem demonstração.

Teorema 2.10 (Derivada da função composta ou regra da cadeia)**.** *Seja f e g duas funções diferenciáveis. Então a função composta $f \circ g$, caso se possa definir, é diferenciável e a sua derivada é dada por*

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Notemos que, se considerarmos $y = f(u)$ e $u = g(x)$ de modo a que $y = f(g(x))$, o teorema anterior diz-nos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exercício 2.5. *Usando a regra da cadeia, calcule as derivadas de:*

1. $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$*;* *2.* $g(x) = e^{\cos(x)}$*;* *3.* $h(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{ch} x)$.

Resolução: A primeira função pode ser vista como $f(x) = u^2(x)$ com $u(x) = \operatorname{sen} x$. Assim, pela regra da cadeia, $f'(x) = 2u(x)u'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$. Escrevendo a segunda função na forma $g(x) = e^{u(x)}$, com $u(x) = \cos x$, temos que, pela regra da cadeia, $g'(x) = e^{u(x)}u'(x) = -\operatorname{sen} x e^{\cos x}$. Finalmente, escrevendo $h(x) = \operatorname{sh}(u(x))$, com $u(x) = \operatorname{ch} x$, temos que $h'(x) = \operatorname{ch}(u(x))u'(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{ch} x) \operatorname{sh} x$. □

Notemos que a composição de duas funções pode ser diferenciável mesmo que uma delas (ou as duas) não o seja. Por exemplo, se $f(x) = c$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, com $c \in]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, e g uma função real de variável real qualquer definida em $]a,b[$, então $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferenciáveis. Mais, para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

que não é diferenciável em nenhum ponto do seu domínio, tem-se que $f^2 = f \circ f$ é uma função constante e, como tal, diferenciável.

Vamos apresentar agora um resultado que permite calcular a derivada da inversa de uma dada função.

Teorema 2.11 (Derivada da função inversa)**.** *Seja* $f :]a,b[\subseteq X \longrightarrow Y$ *uma função invertível e* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *a sua inversa. Se* f *é diferenciável no ponto* $x_0 \in]a,b[$ *e* f^{-1} *é contínua em* $y_0 = f(x_0)$*, então* f^{-1} *é diferenciável nesse ponto se e só se* $f'(x_0) \neq 0$*. Nesse caso*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Demonstração: Pela regra da cadeia aplicada à função $f^{-1} \circ f$ temos que

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x).$$

Ora, como $f^{-1}(f(x)) = x$, então

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = 1.$$

Assim sendo $1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)$ e, como tal, supondo que $f'(x) \neq 0$, temos

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

onde $y = f(x)$. □

Há uma maneira fácil de memorizar a fórmula da derivada da função inversa. Seja f definida por $y = f(x)$ e f^{-1} a sua inversa, isto é, a função tal que

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Pelo teorema anterior

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

ou, noutra notação,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Exercício 2.6. *Mostre que:*

1. $(\text{arc sen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1,1[$; *2.* $(\text{arc cos}\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]-1,1[$.

Resolução: Para o primeiro caso temos que $\text{arc sen}\, x$ é a função inversa de $f(x) = \text{sen}\, x$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Temos então que

$$(\text{arc sen}\, x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(\text{arc sen}\, x)}},$$

ou seja,

$$(\text{arc sen}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

De forma análoga, uma vez que $\text{arc cos}\, x$ é a função inversa de $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$, concluí-se que

$$(\text{arc cos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[. \quad \square$$

A derivada de uma função f, como vimos, conduz a outra função f'. Se f' tem derivada denotamo-la por f'' e designamo-la por segunda derivada. De um modo geral, se n é um inteiro positivo então $f^{(n)}$ denota a derivada de ordem n de f que se obtém partindo de f e derivando sucessivamente f n vezes. Temos assim a fórmula recursiva

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

ou, noutra notação,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x).$$

Uma fórmula que permite calcular imediatamente a derivada de qualquer ordem do produto de duas funções é chamada fórmula de Leibniz. Sejam f e g duas funções admitindo derivadas até à ordem n num intervalo I. Então a função fg também admite derivada até à ordem n em I e

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ (fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg'' \\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \\ &\vdots \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}\end{aligned}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

que, como se sabe, são valores que podem ser obtidos pelo chamado triângulo de Pascal

$$\begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

assim chamado em homenagem a Blaise Pascal (1623–1662). Note-se a semelhança entre a fórmula de Leibniz e o binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

de quem Álvaro de Campos disse ser “tão belo como a Vénus de Milo”.

> O Binómio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.
>
> O que há é pouca gente para dar por isso.
>
> óóóó—óóóóóó óóó—óóóóóóó óóóóóóóó
>
> (O vento lá fora.)
>
> Álvaro de Campos, 15-1-1928

Definição 2.6. *Diz-se que* $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é de* classe C^n, *e denota-se por* $f \in C^n(D)$, *com* n *um inteiro maior ou igual a* 1, *se* f *é* n *vezes diferenciável e as derivadas* $f^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., n$, *são todas contínuas. Se* f *tem derivadas contínuas de todas as ordens, diz-se de classe* C^∞ *e denota-se por* $f \in C^\infty(D)$. *A notação* $f \in C^0(D)$ *indica que* f *uma função contínua.*

2.4 Teoremas fundamentais

Vamos apresentar, nesta secção, cinco teoremas fundamentais do cálculo diferencial. O primeiro teorema é devido a Pierre de Fermat (1601–1665).

Teorema 2.12 (Fermat). *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto contendo o ponto c. Então, se f atinge um extremo local nesse ponto podemos concluir que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Vamos demonstrar para o caso em que c é um ponto de máximo. Quando c é um ponto de mínimo a demonstração é análoga. Para $|h| > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0, \qquad \text{se} \quad h < 0,$$

e

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \qquad \text{se} \quad h > 0.$$

Como f é diferenciável,

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0. \quad \square$$

Note-se que, no Teorema de Fermat, é crucial considerar o intervalo aberto. De facto, se $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x$, para todo o $x \in [1,2]$, os pontos $m = 1$ e $M = 2$ são, respectivamente, pontos de mínimo e de máximo mas $f'(1) = f'(2) = 1$. Por outro lado, o recíproco deste teorema também não é verdadeiro. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem derivada nula em $x = 0$ mas $f(0)$ não é um extremo da função.

Definição 2.7 (Ponto crítico). *Seja f uma função definida num intervalo aberto e seja c um ponto desse intervalo. Dizemos que c é um* ponto crítico *de f se s só se $f'(c) = 0$ ou f não é diferenciável nesse ponto.*

Note-se que nem todos os pontos críticos são pontos onde a função atinge um máximo ou um mínimo (por exemplo, $f(x) = x^3$, com $x \in \mathbb{R}$). Por outro lado, há pontos onde a função atinge um máximo ou um mínimo que não são pontos críticos (por exemplo, $f(x) = x$, com $x \in [1,2]$) e pontos críticos onde a derivada não se anula (como é o caso de $f(x) = |x|$, com $x \in \mathbb{R}$).

O Teorema de Fermat tem a seguinte formulação mais geral cuja demonstração é evidente.

Teorema 2.13. *Seja f uma função definida num intervalo qualquer e seja c um ponto desse intervalo. Se f atinge um máximo ou um mínimo nesse ponto então c é um ponto crítico de f ou c é um dos extremos do intervalo (se o intervalo for fechado).*

Como vimos, a derivada de uma função diferenciável pode não ser uma função contínua. No entanto, as derivadas de funções diferenciáveis partilham com as funções contínuas a propriedade dos valores intermédios O resultado seguinte, devido a Jean-Gaston Darboux (1842–1917), pode ser visto como uma generalização do Teorema do Valor Intermédio.

Teorema 2.14 (Darboux)**.** *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f'(a) \neq f'(b)$, então f' assume em $]a,b[$ todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Demonstração: Fixemos o caso $f'(a) < f'(b)$ (o caso $f'(b) < f'(a)$ prova-se de forma análoga) e tomemos y tal que $f'(a) < y < f'(b)$. Queremos provar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = y$.

Seja $g(x) = f(x) - yx$. Então $g'(a) = f'(a) - y < 0$ e, pela definição de derivada, existe $c_1 \in]a,b[$ tal que $g(c_1) < g(a)$. Analogamente, como $g'(b) = f'(b) - y > 0$, existe $c_2 \in]a,b[$ tal que $g(c_2) < g(b)$. Como g é uma função contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass existe $c \in [a,b]$ onde g assume um valor mínimo. Mas, pelo que acabou de ser dito, $c \neq a$ e $c \neq b$. Então, pelo Teorema de Fermat, $g'(c) = 0$ e, como tal, $f'(c) = y$. $\square$

O Teorema de Darboux explora a natureza mais íntima da funções diferenciáveis, demonstrando que se f' é a derivada de uma função f num dado intervalo, então ela tem a propriedade do valor intermédio nesse intervalo, mesmo não sendo contínua. O Teorema de Darboux não seria diferente do Teorema do Valor Intermédio se as derivadas fossem sempre contínuas. Mas isso não é verdade. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

tem derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

que é descontínua em $x = 0$ (verifique que $f'(0) = 0$).

O Teorema de Darboux tem o seguinte corolário, cuja demonstração é deixada como exercício.

Corolário 2.15. *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então f' não possui descontinuidades de primeira espécie.*

Por vezes é bastante difícil determinar os pontos críticos de uma função. Na verdade, não há garantia que tais pontos existam. O teorema que se segue, devido ao francês Michel Rolle (1652–1719), um dos mais acérrimos opositores do Cálculo Diferencial, dá condições suficientes para a existência de um ponto crítico.

Teorema 2.16 (Rolle)**.** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema de Weierstrass garante que a função atinge, nesse intervalo, um máximo M e um mínimo m. Se $M = m$, então f é constante e, como tal, $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$. Se $M > m$ então pelo menos um desses valores ocorre no interior do intervalo $]a, b[$. Como f é diferenciável, pelo Teorema de Fermat temos que a derivada se anula nesse ponto, o que prova o pretendido. □

O Teorema de Rolle tem a seguinte interpretação dinâmica: se, num movimento rectilíneo, o ponto retorna à posição inicial, então há um instante em que a velocidade é nula.

Do Teorema de Rolle resulta, imediatamente, o seguinte corolário.

Corolário 2.17. *Seja f uma função nas condições do Teorema de Rolle. Então:*

1. *entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero da sua derivada;*
2. *não pode haver mais do que um zero de f inferior (superior) ao menor (maior) zero de f';*
3. *entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.*

O próximo teorema pode ser considerado como uma generalização do Teorema de Rolle para o caso em que $f(a) \neq f(b)$.

Teorema 2.18 (Valor médio de Lagrange)**.** *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstração: Consideremos a função $F(x) = f(x) - \lambda x$, onde λ é um valor real tal que $F(a) = F(b)$. Então,

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como F é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, pelo Teorema de Rolle podemos concluir que existe, pelo menos, um c tal que

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

O Teorema de Lagrange tem a seguinte interpretação dinâmica: num movimento rectilíneo há um instante em que a velocidade instantânea coincide com a velocidade média. Este teorema também tem uma interpretação geométrica interessante: nas condições do teorema, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que a tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é paralela à secante à curva que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Do Teorema de Lagrange resulta, imediatamente, o seguinte corolário.

Corolário 2.19. *Seja f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ Então:*

1. *se f tem derivada nula em todos os pontos do intervalo, f é constante nesse intervalo;*
2. *se g for diferenciáveis em $]a, b[$ e se $f'(x) = g'(x)$, para todo o $x \in]a, b[$, então $f - g$ é constante em $]a, b[$.*
3. *se $f'(x) \geq 0$ (respectivamente, $f'(x) \leq 0$), para todo $x \in]a, b[$, então f é crescente (respectivamente decrescente) em $]a, b[$; se $f'(x) > 0$ (respectivamente, $f'(x) < 0$), para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente (respectivamente estritamente decrescente) em $]a, b[$.*

Atente-se à segunte aplicação do ponto 2 do corolário anterior. No Exercício 2.6 concluímos que as funções $\text{arc sen}\, x$ e $-\text{arc cos}\, x$ têm a mesma derivada. Então, pelo corolário anterior, tem-se que $\text{arc sen}\, x = -\text{arc cos} + C$, com C uma constante real. De facto, tem-se que

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Apresentemos, finalmente, um importante teorema devido a Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Teorema 2.20 (Cauchy)**.** *Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demonstração: Seja

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Como F é contínua e diferenciável e $F(a) = F(b) = 0$, pelo Teorema de Rolle existe c tal que $F'(c) = 0$, o que prova o resultado. □

2.5 Aplicações da derivada

2.5.1 Indeterminações

Quando se estudam limites encontram-se, frequentemente, expressões da forma

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$

onde tanto f como g têm limite zero quando x tende para c. Em tais casos diz-se que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ("zero sobre zero") em $x = c$, uma vez que nada pode ser dito quanto ao seu limite. Nestes casos, também se diz que estamos perante uma indeterminação $\frac{0}{0}$.

Noutras ocasiões, quando f e g se tornam positiva ou negativamente infinitos, quando x tende para c, dizemos que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ ("infinito sobre infinito") em $x = c$. Um exemplo onde tal acontece é no caso em que se pretende calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Vamos estabelecer a chamada regra de L'Hospital e ilustrar como pode ser usada para estudar diferentes formas indeterminadas. Parece que Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital (1661–1704) aprendeu esta regra com o seu professor Johann Bernoulli (1667–1748). A sua demonstração é semelhante à do Teorema de Cauchy.

Teorema 2.21 (Regra de L'Hospital)**.** *Sejam f e g funções diferenciáveis em todos os pontos de $]a,b[$, excepto, possivelmente, em $c \in]a,b[$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$, para $x \neq c$, e $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ em $x = c$. Então, se existir $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, finito ou infinito, o limite $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ também existe e*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Suponhamos que $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em $x = c$ e que

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

para algum número real L. Queremos provar que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Para podermos considerar o Teorema de Rolle, f e g terão que ser contínuas. Consideremos, então, as funções contínuas $\overline{f}$ e $\overline{g}$ tais que

$$\overline{f}(x) = f(x), \quad x \neq c, \qquad \text{e} \qquad \overline{f}(c) = \lim_{x\to c} f(x) = 0$$

$$\overline{g}(x) = g(x), \quad x \neq c, \qquad \text{e} \qquad \overline{g}(c) = \lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Notemos que

$$\lim_{x\to c}\overline{f}(x)=\lim_{x\to c}f(x),\qquad \lim_{x\to c}\overline{g}(x)=\lim_{x\to c}g(x)$$

e que, para todo o $x\neq c$, $\overline{f}'(x)=f'(x)$ e $\overline{g}'(x)=g'(x)$. Consideremos agora

$$F(x)=\overline{f}(x)-\lambda\overline{g}(x),$$

onde λ é um valor real tal que $F(x)=F(c)$. Para que tal aconteça temos que ter

$$\lambda=\frac{\overline{f}(x)-\overline{f}(c)}{\overline{g}(x)-\overline{g}(c)}=\frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)},\qquad \overline{g}(x)\neq 0.$$

Aplicando o Teorema de Rolle a F (contínua e diferenciável) temos que existe um $\xi\in]x,c[$ tal que $F'(\xi)=0$. Mas isso implica que

$$\overline{f}'(\xi)-\lambda\overline{g}'(\xi)=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{\overline{f}'(\xi)}{\overline{g}'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

donde se conclui que

$$\frac{\overline{f}(\xi)}{\overline{g}(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tomando $x\to c$ temos que $\xi\to c$ e, assim sendo, como existe limite do quociente das derivadas temos que

$$\lim_{x\to c}\frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para os casos em que

$$\lim_{x\to c}\frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}=\pm\infty$$

a demonstração é análoga. Para a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ o resultado também é válido mas a demonstração é mais difícil. □

É possível demonstrar que a regra de L'Hospital também é válida para limites laterais e para limites quando $x\to\pm\infty$.

Aplicando sucessivamente a regra de L'Hospital para limites quando $x\to+\infty$, pode demonstrar-se que:

1. a exponencial cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente, isto é,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r}=+\infty,\qquad \forall r\in\mathbb{R}^+;$$
2. o logaritmo cresce mais devagar do que qualquer potência do seu argumento, isto é,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0,\qquad \forall r\in\mathbb{R}^+.$$

Consideremos agora outras formas indeterminadas que se podem reduzir ao caso $\frac{0}{0}$.

Indeterminação $0 \times \infty$. Suponhamos que

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = \infty.$$

Então $f(x)g(x)$ é uma forma indeterminada $0 \times \infty$ em $x = c$. Nestes casos faz-se

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

que já é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Indeterminação $\infty - \infty$. Consideremos o seguinte exemplo

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} - \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$$

Neste caso estamos na presença de uma forma indeterminada $\infty - \infty$ em $x = 0^+$. Mas

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

que já é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Indeterminações 0^0, ∞^0 e 1^∞. Estas indeterminações surgem quando se consideram limites de expressões da forma $f(x)^{g(x)}$. Neste caso faz-se

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$$

e calcula-se

$$\lim_{x\to c} \ln y = \lim_{x\to c} g(x) \ln f(x)$$

que pode ser tratado como nos casos precedentes. Se:

- $\lim_{x\to c} \ln y = L$ então $\lim_{x\to c} y = e^L$;
- $\lim_{x\to c} \ln y = +\infty$ então $\lim_{x\to c} y = +\infty$;
- $\lim_{x\to c} \ln y = -\infty$ então $\lim_{x\to c} y = 0$.

A regra de L'Hospital só se pode aplicar quando necessária. Note-se que, por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

e se aplicarmos duas vezes a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1,$$

o que nos permite concluir que, neste caso, a regra não pode ser aplicada.

2.5.2 Extremos e concavidades

Os teoremas fundamentais permitem-nos estabelecer o chamado teste da primeira derivada para a determinação de extremos locais. Seja c um ponto crítico de uma função f definida em $]a,b[$ contendo c. Se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ excepto, possivelmente, no ponto c, então: se

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x \in]a,c[\\ f'(x) < 0, & x \in]c,b[\end{cases},$$

então $f(c)$ é um máximo local; se

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & x \in]a,c[\\ f'(x) > 0, & x \in]c,b[\end{cases},$$

então $f(c)$ é um mínimo local; se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]a,b[/\{c\}$, então $f(c)$ não é máximo nem mínimo local.

Outro conceito importante no traçado gráfico de uma função e para o qual as derivadas poderão ser úteis é o conceito de concavidade.

Definição 2.8 (Concavidade)**.** *Seja f uma função diferenciável num ponto c. O gráfico de f tem* concavidade *voltada para cima (baixo) no ponto $(c, f(c))$ se existe um intervalo aberto contendo c tal que, nesse intervalo, o gráfico de f está acima (abaixo) da tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Notemos que, quando a concavidade está voltada para cima (baixo) o coeficiente angular da tangente cresce (decresce) com x.

Como é sabido, dada uma função diferenciável, se a sua derivada é positiva (negativa) num dado intervalo, a função é crescente (decrescente) nesse intervalo. Consequentemente, se os valores da segunda derivada num determinado intervalo são positivos (negativos) estão a função derivada é crescente (decrescente) nesse intervalo. Este facto sugere o seguinte teorema cuja demonstração também resulta dos teoremas fundamentais apresentados.

Teorema 2.22. *Se uma função f é diferenciável num intervalo aberto contendo c então, no ponto $(c, f(c))$ o gráfico é côncavo para cima (baixo) se $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$).*

Pode haver pontos no gráfico de uma função para os quais a concavidade muda de sentido. Tais pontos são chamados pontos de inflexão.

Definição 2.9 (Ponto de inflexão)**.** *O ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função f é um* ponto de inflexão *se existe um intervalo aberto $]a,b[$ contendo c tal que ocorra uma das seguintes situações:*

$$f''(x) > 0 \text{ se } x \in]a,c[\text{ e } f''(x) < 0 \text{ se } x \in]c,b[;$$

ou

$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in]a,c[\text{ e } f''(x) > 0 \text{ se } x \in]c,b[.$$

Se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f e se f'' é contínua num intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. Assim, para localizar os pontos de inflexão de $f \in C^2(]a,b[)$ – f é tal que f, f' e f'' são contínuas em $]a,b[$ – começamos por determinar os pontos x tais que $f''(x) = 0$.

A segunda derivada também pode ser útil na classificação dos extremos de uma função.

Teorema 2.23 (Teste da segunda derivada). *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto contendo c e $f'(c) = 0$. Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em $x = c$. Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = c$.*

Se, no teorema anterior, $f''(c) = 0$, o teste da segunda derivada não funciona. Em tais casos, usa-se o teste da primeira derivada.

Exercício 2.7. *Faça o estudo da função*

$$f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

quando $a = 1$. Esta curva foi estudada por Maria Gaetana Agnesi (1717–1783) e ficou conhecida pelo nome de bruxa de Agnesi *ou* feiticeira de Agnesi. *Esse nome, encontrado apenas em textos em inglês, é resultado de uma tradução errada. O nome dado por Agnesi à curva era "versiera" (que significa "curva"). John Colson (1680–1760), famoso matemático de Cambridge, achou o texto de Agnesi tão importante (é o primeiro livro a tratar, simultaneamente, do cálculo diferencial e integral), que aprendeu italiano apenas para traduzi-lo "para o benefício da juventude britânica" e, provavelmente, confundiu a palavra "versiera" com "avversiera", que significa "bruxa".*

Resolução:

1. Domínio da função e continuidade
   A função é definida e contínua para todo o $x \in \mathbb{R}$.
2. Paridade e periodicidade
   Como $f(x) = f(-x)$ a função é par. Como não existe qualquer valor real T tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, a função não é periódica.
3. Primeira derivada e extremos locais
   Temos que
   $$f'(x) = -\frac{2xa^3}{(x^2 + a^2)^2}$$
   e, como tal, a função tem um ponto crítico em $x = 0$. Para determinar os extremos locais, considera-se a seguinte tabela:

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	a	$\searrow$	

   Analisando o quadro, constatamos que a função tem um máximo local (e absoluto) em $(0, a)$. O quadro de variação poderia ser completado considerando
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

4. Contradomínio e assímptotas

   Pela alínea anterior podemos concluir que o contradomínio de f é $\mathbb{R}^+$ e que a função tem uma assímptota horizontal $y = 0$.

5. Segunda derivada, concavidades e pontos de inflexão

   Temos que

$$f''(x) = 2xa^3 \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

   e, como tal, a segunda derivada anula-se para $x = \pm a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Para determinar os pontos de inflexão, considera-se a seguinte tabela:

	$-\infty$		$-a\sqrt{3}/3$		$a\sqrt{3}/3$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$3/4a$	$\cap$	$3/4a$	$\cup$	

.

   Concluímos que a função tem dois pontos de inflexão em $(\pm a\sqrt{3}/3, 3/4a)$.

6. Pontos de intersecção com os eixos coordenados

   A curva apenas interseca o eixo dos yy no ponto $y = a$.

7. Gráfico da função

   O gráfico da função, quando $a = 1$, é dado na Figura 2.4. $\square$

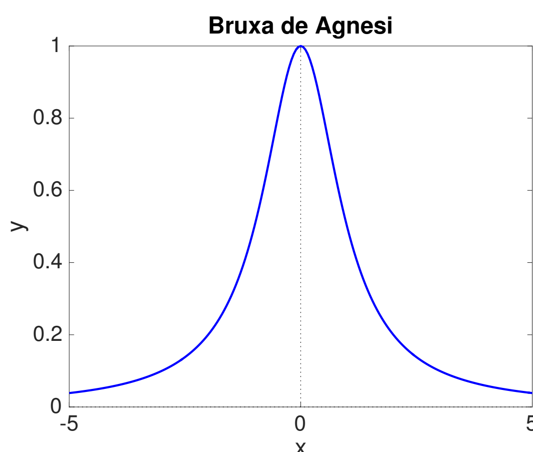


Figura 2.4: Bruxa de Agnesi (2.1), com $a = 1$.

2.5.3 Derivação implícita e taxas relacionadas

Nalgumas aplicações a variável dependente y e a variável independente x, em vez de estarem relacionadas por meio de uma função real de variável real, como em $y = f(x)$, estão relacionadas por meio de uma equação $F(x, y) = 0$ como em $x^2 + y^2 = 9$ ou em $x^2 + xy^3 + 5x = 19$ ou ainda em $5x \cos y = 2^{x+y}$. Por vezes estas equações podem ser reduzidas à forma $y = f(x)$ mas, muitas vezes, tal não é possível.

Apesar das dificuldades podemos determinar a derivada de y em ordem a x, nos casos em que ela exista, sem ter que explicitar y como função de x (com a vantagem adicional da derivada obtida, também ela geralmente definida implicitamente, ser válida para todas as funções reais de variável real definidas pela equação inicial). Para tal basta considerar a regra de cadeia.

Consideremos um exemplo. Para determinar y', quando y é definida implicitamente por meio de

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y(x))^2 = 9,$$

podemos começar por derivar ambos os membros da igualdade em ordem a x e obter, usando a regra da cadeia,

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Noutra notação temos $2x + 2yy' = 0$. Assim, quando $y(x) \neq 0$, temos que

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

A regra da cadeia é, geralmente, útil quando pretendemos relacionar taxas de variação de duas quantidades $x(t)$ e $y(t)$ que dependem de uma terceira quantidade, normalmente o tempo t.

Exercício 2.8. *Uma escada de 3 metros de comprimento está encostada a uma parede vertical. Se o fundo da escada deslizar horizontalmente afastando-se da parede a uma taxa de* 0,3 *metros por segundo, a que velocidade está o topo da escada a deslizar ao longo da parede?*

Resolução: Consideremos $x(t)$ a distância horizontal da parede à base da escada e $y(t)$ a distância vertical do solo ao topo da escada, num dado instante t. Temos que $x'(t) =$ 0,3 metros por segundo. Queremos determinar $y'(t)$. Como $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 9$, aplicando a regra da cadeia temos que

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0.$$

Logo, se $y(t) \neq 0$, concluímos que

$$y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}x'(t) = -0{,}3\frac{x(t)}{y(t)}. \qquad \square$$

2.5.4 Tangente a uma curva em coordenadas paraméticas ou polares

A regra da cadeia e o teorema da derivada da função implícita permitem-nos calcular as derivadas de funções definidas parametricamente. Suponhamos que

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \qquad t \in I, \tag{2.2}$$

com f uma função injectiva. Estas equações definem parametricamente uma função F dada por

$$\begin{array}{rccc} F: & f(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = F(x) = g(f^{-1}(x)). \end{array}$$

Então, caso f e g sejam funções diferenciáveis, podemos calcular a derivada de F em $f(I)$ sem calcular explicitamente a expressão analítica de F.

Suponhamos que f e g são funções diferenciáveis em I e seja $x \in f(I)$ tal que $f'(t) \neq 0$, com $t = f^{-1}(x) \in I$. Pela regra da cadeia,

$$F'(x) = g(f^{-1}(x))' = g'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x),$$

ou, noutra notação,

$$\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(g(f^{-1}(x))\right) = \frac{dg}{dx}(f^{-1}(x))\frac{df^{-1}}{dx}(x).$$

Mas, pelo teorema da derivada da função implícita,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

e, como tal,

$$F'(x) = \frac{g'(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} = \left.\frac{g'(t)}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}. \tag{2.3}$$

Noutra notação temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \text{se} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0. \tag{2.4}$$

Para calcular as derivadas superior (caso f e g as admitirem) poderíamos proceder analogamente. Por exemplo, para determinar

$$F''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}(x),$$

basta substituir y por $\frac{dy}{dx}$ em (2.4) obtendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \text{se} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Noutra notação, atendendo a que, por (2.3), $F'(x) = G(f^{-1}(x))$, onde

$$G(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \qquad t = f^{-1}(x), \qquad f'(t) \neq 0,$$

tem-se que

$$F''(x) = \left.\frac{G'(t)}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}, \qquad \text{se} \quad f'(t) \neq 0.$$

Pretendemos agora determinar o declive da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ definida pela equações (2.2) num ponto $(f(t_0), g(t_0))$, com $t_0 \in I$.

Teorema 2.24. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva em coordenadas paramétricas definida pela equações (2.2), com f e g duas funções diferenciáveis em I. Suponhamos ainda que $f'(t) \neq 0$, para todo o t em I. O declive da tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(f(t_0), g(t_0))$, com $t_0 \in I$, é dado por*

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Demonstração: Como $f'(t) \neq 0$, para todo o $t \in I$, pelo Teorema de Darboux concluímos que $f'(t) > 0$, para todo o $t \in I$, ou $f'(t) < 0$, para todo o $t \in I$ (se f' for contínua em I, a mesma conclusão poderia ser obtida pelo Teorema do Valor Intermédio). Temos então que f é estritamente crescente em I ou estritamente decrescente em I, respectivamente. Em qualquer um dos casos, f é invertível.

Sendo f uma função invertível, a curva $\mathcal{C}$ é o gráfico da função definida por $y = g(f^{-1}(x))$, para todo o $x \in f(I)$. Para determinar o declive da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(x_0, y_0) = (f(t_0), g(t_0))$, basta considerar $g'(x_0)$. Como foi visto,

$$g'(x_0) = \left.\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}\right|_{t_0 = f^{-1}(x_0)},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Exercício 2.9. *Determine a tangente à curva de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}, \qquad t \in [-1, 2],$$

no ponto $(0, -1)$.

Resolução: O ponto $(x, y) = (0, -1)$ é obtido quando $t = 0$. Como $f(t) = 2t$ e $g(t) = t^2 - 1$ são diferenciáveis no intervalo dado e $f'(0) = 2 \neq 0$, pelo teorema anterior o declive da recta tangente à curva no ponto $(x, y) = (0, -1)$ é dado por

$$m = \frac{g'(0)}{f'(0)} = 0.$$

A recta tangente à curva no ponto dado tem equação $y - (-1) = 0 \times (x - 0)$, isto é, a tangente é a recta horizontal $y = -1$. $\square$

Consideremos agora um sistema de coordenadas polares e uma curva $\mathcal{C}$ definida, nessas coordenadas, por $\rho = f(\theta)$, $\theta \in I$. Se considerarmos o sistema de coordenadas cartesiana xy de modo a que o semi-eixo positivo dos xx coincida com o eixo polar e tal que a origem coincida com o pólo, a curva pode ser definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad \theta \in I.$$

Se f for diferenciável em I, o declive da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(f(\theta_0), \theta_0)$, com $\theta_0 \in I$, é calculado como anteriormente. Assim, pelo Teorema 2.24 o declive é dado por

$$m = \left.\frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos\theta)}\right|_{\theta=\theta_0}.$$

Após calculado o declive, a equação cartesiana da recta tangente à curva nesse ponto obtém-se imediatamente.

Exercício 2.10. *Num sistema de coordenadas polares, considere a curva definida pela equação $\rho = 2\cos\theta$, $\theta = [\pi/6, \pi/3]$. Determine a tangente ao gráfico no ponto correspondente a $\theta = \pi/4$.*

Resolução: Num sistema de coordenadas cartesianas apropriado, a curva pode ser definida por

$$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta \\ y = \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}, \qquad \theta \in [\pi/6, \pi/3].$$

Para $\theta = \pi/4$, obtemos o ponto $(\sqrt{2}, \pi/4)$ no sistema de coordenadas polares, ou seja, o ponto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ no sistema de coordenadas cartesianas. Como estamos em presença de funções diferenciáveis, o declive da recta tangente à curva no ponto $(1, 1)$ é dado, de acordo com o Teorema 2.24, por

$$m = \frac{2\cos(\pi/2)}{-2\operatorname{sen}(\pi/2)} = 0.$$

Logo, a recta tangente à curva no ponto $(1, 1)$ é a recta horizontal $y = 1$. □

Notemos que, se $f'(t_0) = 0$, para algum $t_0 \in I$, a curva $\mathcal{C}$ definida pela equações (2.2): admite uma tangente vertical no ponto $(f(t_0), g(t_0))$, se $g'(t_0) \neq 0$; não tem tangente definida no ponto $(f(t_0), g(t_0))$, se $g'(t_0) = 0$. Neste último caso diz-se que a curva tem um ponto singular no ponto $(f(t_0), g(t_0))$ ou uma singularidade em $t = t_0$.

Exercício 2.11. *Determine os pontos singulares do cardióide $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Resolução: O cardióide, num sistema de coordenadas cartesianas apropriado, pode ser dado pelas equações

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Os pontos singulares são os pontos para os quais

$$\begin{cases} -\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta = 0 \\ \cos\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \\ \cos\theta(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta(1 + \operatorname{sen}\theta) = 0 \\ \cos\theta = 0 \vee (1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ 1 + \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{3}{2}\pi.$$

Logo, o único ponto singular é $(0, 0)$. Verifique na Figura 1.10 a que ponto do gráfico corresponde a singularidade da curva. □

Exercício 2.12. *Considere a curva $\mathcal{C}$ definida pelas equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. *Mostre que $\mathcal{C}$ tem duas tangentes no ponto $(3,0)$ e encontre as suas equações.*
2. *Determine os pontos de $\mathcal{C}$ onde a tangente é horizontal ou vertical.*
3. *Determine os valores do parâmetro t onde a curva é crescente ou decrescente e onde a sua concavidade é virada para cima ou virada para baixo.*
4. *Esboce a curva.*

Resolução:

1. Note-se que $y = t^3 - 3t = 0$ quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$. Portanto, o ponto $(3,0)$ em $\mathcal{C}$ surge de dois valores do parâmetro: $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isto significa que a curva se intersecta em si mesma em $(3,0)$. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$

o declive da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{6}{2\sqrt{t}} = \pm\sqrt{3}.$$

Assim, as equações das tangentes são

$$y = \sqrt{3}(x-3) \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{3}(x-3).$$

2. A curva $\mathcal{C}$ tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 2t = 0$, isto é, quando $t = 0$. O ponto correspondente em $\mathcal{C}$ é $(0,0)$. A curva $\mathcal{C}$ tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 3t^2 - 3 = 0$, isto é, quando $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em $\mathcal{C}$ são $(1,-2)$ e $(1,2)$.

3. Como $dx/dt = 2t$ e $dy/dt = 3(t+1)(t-1)$, podemos resumir os intervalos de monotonia da curva em função da variação do parâmetro t na seguinte tabela:

	$t<-1$	$t=-1$	$-1<t<0$	$t=0$	$0<t<1$	$t=1$	$t>1$
dx/dt	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
dy/dt	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$	1	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$	1	$\rightarrow$
y	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-2	$\uparrow$
$\mathcal{C}$	$\nwarrow$	$(1,2)$	$\swarrow$	$(0,0)$	$\searrow$	$(1,-2)$	$\nearrow$

Para determinar a concavidade da curva, calculemos a segunda derivada. Temos que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}.$$

Então a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.

4. Usando a informações das alíneas anteriores facilmente se obtém a curva traçada na Figura 2.5. □

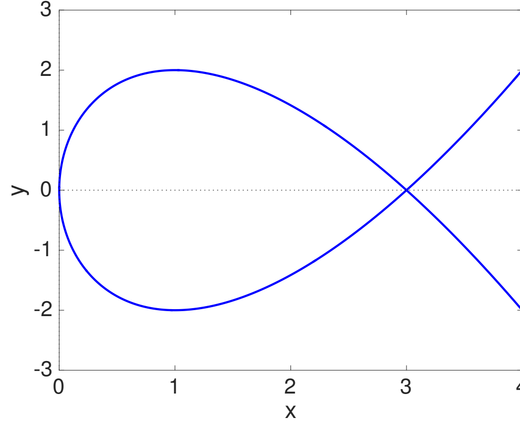


Figura 2.5: Curva $\mathcal{C}$ do Exercício 2.12.

2.5.5 Aproximações lineares e diferenciais

Vamos terminar este capítulo com a introdução da noção de diferencial e referir algumas das suas aplicações. Comecemos por considerar uma função f real de variável real

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Em muitas aplicações a variável independente x está sujeita a pequenas variações Δx chamadas acréscimos de x. Para calcular o acréscimo Δy correspondente à variável dependente y fazemos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Se f é diferenciável temos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Assim, quando $\Delta x \approx 0$, o acréscimo Δy pode ser aproximado por $f'(x)\Delta x$, isto é,

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{2.5}$$

Se atendermos à interpretação geométrica da noção de derivada, a aproximação (2.5) pode ser vista como uma aproximação linear. De facto, consideremos um ponto x_0 pertencente a um intervalo I contido no domínio de f e seja f diferenciável em I. Quando analisamos geometricamente a derivada de uma função num ponto, verificamos que o gráfico da função se confunde com o da recta tangente à curva nesse ponto nas proximidades do ponto de tangência. Podemos assim pensar em usar a recta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ como uma aproximação à função $y = f(x)$, quando x está próximo de x_0. Como tal, em muitas aplicações práticas, quando $x \approx x_0$, considera-se

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.6}$$

Esta aproximação é chamada, por razões óbvias, aproximação linear de f em x_0.

Considerando $\Delta x_0 = x - x_0$ e $\Delta y_0 = f(x) - f(x_0)$, a aproximação (2.6) pode ser escrita na forma $\Delta y_0 \approx f'(x_0)\Delta x_0$. A função linear cujo gráfico é a recta tangente a f em $(x_0, f(x_0))$, isto é,

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

é chamada linearização de f em x_0.

Exercício 2.13. *Na física são vários os exemplos onde se consideram aproximações lineares. Por exemplo, ao deduzir a fórmula para o período de um pêndulo, obtém-se a expressão $-g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial. Muitos autores, nesta altura, substituem $\operatorname{sen} \theta$ por θ, com a observação de que $\operatorname{sen} \theta$ está muito próximo de θ, se θ for um valor pequeno. Verifique que a linearização de $f(x) = \operatorname{sen} x$, em $x_0 = 0$, é dada por $y = x$ e, como tal, a aproximação linear em de f nesse ponto é $\operatorname{sen} x \approx x$.*

Resolução: De facto, a linearização de $f(x) = \operatorname{sen} x$, em $x_0 = 0$, é dada por

$$L(x) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0(x - 0) = x$$

e, como tal, a aproximação linear nesse ponto é $\operatorname{sen} x \approx x$. □

Uma noção útil neste contexto é a de diferencial. O diferencial dx da variável independente x é dado pelo seu acréscimo, isto é, $dx = \Delta x$; o diferencial dy da variável dependente y é dado por

$$dy = f'(x)dx.$$

Na linguagem dos diferenciais, podemos dizer que a aproximação linear (2.6) se resume a considerar a aproximação do acréscimo da variável dependente pelo seu diferencial calculado no ponto dado, isto é

$$\Delta y_0 \approx dy_0 = f'(x_0)\Delta x_0.$$

Exercício 2.14. *Determine o diferencial dy para a função $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $x = \pi/6$ e calcule o seu valor sabendo que $dx = -0{,}1$.*

Resolução: Tem-se que

$$dy = f'(x)dx = -\cos(\pi/6)0{,}1 = -\frac{\sqrt{3}}{20}. \quad \square$$

Os diferenciais têm uma aplicação importante na determinação de estimativas para os erros que se comentem nos resultados em função dos erros cometidos nos dados.

Em muitas situações práticas, os dados x não são conhecidos de forma exacta. O que se conhece é um valor x_0 que foi obtido com uma precisão ϵ, em princípio, pequena. Podemos então dizer que a diferença entre o valore exacto x e o valores conhecido (afectados de erro) x_0, representada por $\Delta x_0 = x - x_0$, é tal que $|\Delta x_0| \leq \epsilon$. Usando os diferencias, podemos obter uma estimativa para o erro que se comete quando se aproxima $y = f(x)$ por $y_0 = f(x_0)$, com f uma função diferenciável. De facto,

$$|\Delta y_0| = |y - y_0| \approx |dy_0| = |f'(x_0)||\Delta x_0| \leq |f'(x_0)|\epsilon.$$

Exercício 2.15. *Determine o erro que se comete ao calcular* $y = \cos(10x)$ *quando se considera uma aproximação* $x_0 = 3{,}1416$ *para* x *obtida com precisão* $|\Delta x_0| \leq 0{,}5 \times 10^{-4}$.

Resolução: Pretende-se determinar uma estimativa para $\Delta y_0 = f(x) - f(x_0)$, quando o valor de $x \in [x_0 - 0{,}5 \times 10^{-4}, x_0 + 0{,}5 \times 10^{-4}] = [3{,}14155,\ 3{,}14165]$. Essa estimativa é obtida pela determinação de um majorante para o diferencial

$$dy_0 = -10\,\mathrm{sen}(10x_0)dx_0,$$

Então, como para as variáveis dependentes o acréscimo Δx_0 é igual ao diferencial dx_0,

$$|\Delta y_0| \approx |dy_0| = |-10\,\mathrm{sen}(10x_0)||\Delta x_0| \leq 0{,}3 \times 10^{-6}.$$

Note-se que, neste exemplo, a uma precisão de 4 casas decimais nos dados, corresponde uma precisão de 6 casas decimais no resultado. □

Se, no exercício anterior, considerássemos a função $y = e^x$ e a aproximação $x_0 = 4{,}0$ para x obtida com uma precisão $|\Delta x_0| \leq 0{,}5 \times 10^{-1}$, obtínhamos uma estimativa para o erro nos resultados dada por

$$|\Delta y_0| \approx |dy_0| = e^{x_0}|\Delta x_0| \leq 0{,}05e^{4{,}0} \approx 5{,}74. \tag{2.7}$$

Neste caso, a uma precisão de 1 casa decimal nos dados, corresponde um valor para o resultado onde não é possível garantir qualquer casa decimal correcta.

Os exemplos anteriores permitem concluir que a derivada de uma função é um bom indicador da sensibilidade da função relativamente à variação da variável independente. De facto, se a derivada da função for pequena, a erros pequenos nos dados correspondem erros pequenos nos resultados; se a a derivada da função for grande, a erros pequenos nos dados correspondem erros grandes nos resultados.

Para ter uma ideia mais precisa sobre o erro que se comete na aproximação do acréscimo Δy de uma função $y = f(x)$ pelo seu diferencial dy, poder-se-ía calcular o chamado erro relativo

$$\delta_y = \frac{|\Delta y|}{|y|}.$$

Atendendo à definição de diferencial tem-se que

$$\delta_y = \frac{|\Delta y|}{|y|} \approx \frac{|dy|}{|y|} = \frac{|f'(x)x|}{|f(x)|}\frac{|dx|}{|x|} = \frac{|f'(x)x|}{|f(x)|}\delta_x.$$

No caso particular da aproximação (2.7) temos que $\delta_{y_0} \approx 4{,}0\delta_{x_0}$, o que significa que o erro relativo do resultado é quatro vezes o erro relativo dos dados.

Exercício 2.16. *O raio de uma esfera mede 21 cm, valor obtido com um erro máximo de* 0,05 *cm. Qual o erro máximo cometido no cálculo do volume da esfera quando é usado esse valor para o seu raio?*

Resolução: Se o raio da esfera é r, o seu volume é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente ao valor de V é dado por ΔV, que pode ser aproximado pelo diferencial

$$|\Delta V| \approx |dV| = 4\pi r^2 |dr|.$$

Quando $r = 21$ cm e $|dr| \leq 0{,}05$ cm, temos que

$$|dV| \leq 4\pi(21)^2 0{,}05\text{cm}^3 \approx 277\text{cm}^3.$$

Assim o erro (absoluto) cometido no cálculo do volume é majorado por 277cm^3.

Também se pode determinar o majorante para o erro relativo (o módulo em V e em r pode ser omitido pois tratam-se de quantidades positivas)

$$\delta_V = \frac{|\Delta V|}{V} \approx \frac{|dV|}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3}|dr| = 3\frac{|dr|}{r} = 3\delta_r.$$

Assim, o erro relativo cometido na aproximação do volume é cerca de 3 vezes o erro relativo cometido na aproximação do raio. Como o erro relativo do raio é

$$\delta_r = \frac{|dr|}{r} \leq \frac{0{,}05}{21} \approx 0{,}0024,$$

isto é 0,24%, temos que o erro relativo cometido na aproximação do volume inferior a 0,007, ou seja, a 0,7%. □

2.5.6 Método de Newton*

O método que iremos estudar nesta secção, devido a Isaac Newton (1642–1727) e a Joseph Raphson (∼1648–∼1715), é um dos métodos mais conhecidos e eficazes para a determinação de aproximações numéricas de raízes de equações. Para o definir, vamos considerar duas abordagens: a primeira recorrendo ao Teorema do Valor Médio de Lagrange e a segunda considerando a interpretação geométrica da noção de derivada e da linearização da função.

Seja f uma função diferenciável num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tal que $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$. Seja $x^* \in [a, b]$ a única raiz de f nesse intervalo, isto é, $f(x^*) = 0$. Como o valor de x^* não é conhecido (é o valor que queremos determinar), vamos considerar um outro ponto $x_0 \in [a, b]$, que pode ser visto como uma aproximação inicial a x^*. Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange

$$\frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0} = f'(c),$$

com c um ponto pertencente ao intervalo definido pelos pontos x^* e x_0. Temos então, uma vez que $f(x^*) = 0$, que

$$-\frac{f(x_0)}{f'(c)} = x^* - x_0 \Leftrightarrow x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(c)}.$$

Como c é um valor desconhecido, vamos considerar a derivada calculada em x_0. Nesse caso já não obtemos como resultado o valor de x^*, mas sim um valor distinto a que chamamos x_1 e que é dado por

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Procedendo de forma análoga, poderemos definir um processo iterativo pela fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1 \ldots, \tag{2.8}$$

designado por método de Newton ou método de Newton-Raphson.

Coloca-se, no entanto, a questão de saber se o método é convergente para x^*, isto é, se

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*.$$

Outra questão é a de saber como definir a aproximação inicial x_0 e como parar o processo iterativo. Antes de responder a estas questões, vamos considerar a correspondência geométrica deste método.

A recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se considerarmos a intersecção dessa recta com o eixo dos xx, isto é, com a recta $y = 0$, temos que a abcissa x_1 do ponto de intersecção é dada por

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

O método de Newton pode assim ser construído se voltarmos a repetir o processo para os sucessivos valores de x_k, $k = 1, 2, ...$, obtidos desta forma. Por esta razão o método de Newton é também chamado muitas vezes como método das tangentes.

Vamos agora apresentar as condições que deverão ser impostas para que a sucessão de aproximações geradas pelo método de Newton convirja para a raiz x^* de $f(x) = 0$.

Teorema 2.25. *Seja f uma função real de variável real definida num intervalo $[a,b]$. Se*

1. $f \in C^2([a,b])$,
2. $f(a)f(b) < 0$,
3. $f'(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$,
4. $f''(x) \leq 0$ *ou* $f''(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$,

então a sucessão $\{x_k\}$, $k = 0,1,\ldots$, gerada pelo método (2.8), com $x_0 \in [a,b]$ tal que

5. $f(x_0)f''(x_0) > 0$,

converge para a única raiz x^* de $f(x) = 0$ em $[a,b]$.

Apesar de não apresentarmos a demonstração do teorema (que pode ser vista em [2]), vamos fazer algumas considerações quanto à importância da imposição das hipóteses. As três primeiras condições impostas garantem a existência de solução de $f(x) = 0$ no intervalo $]a,b[$. Por outro lado, a terceira condição também é importante para garantir que podemos aplicar o método de Newton sem o risco de poder ocorrer divisões por zero. A quarta condição garante que a concavidade da função está sempre virada para o mesmo lado, evitando situações onde o zero da função coincide com o zero da segunda derivada, o que poderia corresponder a o método *entrar em ciclo*. A última condição obriga a escolher a aproximação inicial x_0 por forma a que, nesse ponto, a função e a segunda derivada tenham o mesmo sinal. Este facto faz com que as sucessivas iterações do método se situem sempre no intervalo definido pela aproximação inicial x_0 e pela raiz x^*.

Os critérios de paragem mais usuais no método de Newton são: o critério do erro absoluto, que faz parar o processo iterativo quando $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$, com ϵ uma tolerância dada; o critério do erro relativo, que tem como critério de paragem $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon |x_{k+1}|$, com ϵ uma tolerância dada, e o critério do número máximo de iterações, que termina o processo quando $k = k_{max}$, com k_{max} o número máximo de iterações.

O algoritmo para o método de Newton pode ser dado como se segue.

Algoritmo 2.1 Método de Newton

Dados: f, f', $x0$, ε e $kmax$
$k := 0$
$x := x0$
Repetir
    $d := -f(x)/f'(x)$
    $x := x + d$
    $k := k + 1$
até que $|d| \leq \varepsilon$ ou $k = kmax$
Resultado: $x^* \approx x$

Exercício 2.17. *Localize graficamente as raízes de* $f(x) = 0$*, onde*

$$f(x) = x^2 - 1 - \ln(x+1),$$

e aproxime a maior delas usando o método de Newton duas vezes.

Resolução: Como $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \ln(x+1)$, traçando o gráfico de $y = x^2 - 1$ e de $y = \ln(x+1)$ (ver Figura 2.6) verificamos que $f(x) = 0$ possui duas raízes reais: $x_1^* \in]-1, 0[$ e $x_2^* \in]1, 2[$.

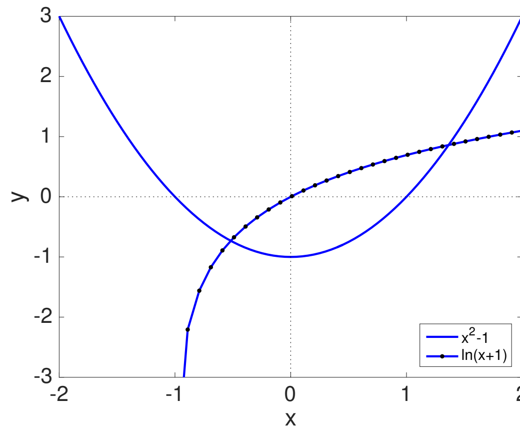


Figura 2.6: Funções do Exercício 2.17.

Façamos a confirmação analítica apenas para x_2^*. Assim:

1. $f \in C(]1, 2[)$;
2. $f(1)) = -\ln 2 < 0$ e $f(2) = 3 - \ln 3 = 1{,}901388 > 0$;
3. $f'(x) = 2x - (x-1)^{-1} > 0$, para $x \in]1, 2[$.

Logo a raiz x_2^* de $f(x) = 0$ existe e é única no intervalo $[1, 2]$.

Para aplicarmos o método de Newton temos primeiro que provar a sua convergência. Como $f(x) = x^2 - 1 - \ln(x+1)$, $f'(x) = 2x - (x+1)^{-1}$ e $f''(x) = 2 + (x+1)^{-2}$ temos que $f \in C^2([1, 2])$. Por outro lado, como $f'(x) > 0$ (prove!) e $f''(x) \geq 0$, para todo o $x \in [1, 2]$, o Teorema 2.25 garante que o método de Newton aplicado à equação dada gera uma sucessão de valores convergentes para x_2^*, desde que x_0 seja escolhido por forma a que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, isto é, por forma a que $f(x_0) > 0$.

Seja, então, $x_0 = 2$. Assim:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 1{,}48144; \\ x_2 &= 1{,}48144 - \frac{f(1{,}48144)}{f'(1{,}48144)} = 1{,}369785. \end{aligned}$$

Uma estimativa para o erro absoluto pode ser dada por $|x_2 - x_1| = 0{,}1116554$. $\square$

2.6 Exercícios práticos

Exercício 2.18. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções tais que* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. *Mostre que escolhendo convenientemente as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *e definindo* $h = f \times g$ *podemos ter as seguintes situações:*

1. $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$*;* *2.* $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$*;* *3.* $\lim_{x\to a} h(x) = -27$*;* *4.* $\lim_{x\to a} h(x) = 27$.

Exercício 2.19. *Use o teorema das funções enquadradas para provar que:*

1. $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$*;* *2.* $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$*;*

3. $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$*, sendo* $f(x)$ *uma função tal que* $f(x) \in [0, c]$*,* $c \in \mathbb{R}^+$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.20. *Prove que* $\lim_{x\to 0} x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Exercício 2.21. *Prove que não existem os seguintes limites:*

1. $\lim_{x\to a} \cos \frac{1}{x-a}$*;* *2.* $\lim_{x\to a} \operatorname{tg} \frac{1}{x^2 - a^2}$*;* *3.* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$*;* *4.* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$.

Exercício 2.22. *Estude, quanto à continuidade, as seguintes funções:*

1. $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1, & x < 0 \\ 1, & x \in [0, 2] \\ \operatorname{sen} x, & x > 2 \end{cases}$ *;* *2.* $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$*;* *3.* $f(x) = \ln(|x|)$*;*

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ *;* *5.* $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$*;* *6.* $f(x) = \sum_{k=0}^{5} x^k$.

Exercício 2.23. *Seja* $f(x) = \frac{x-2}{x}$*. Verifique que* $f(-1)f(1) < 0$*. Poderá concluir que existe* $c \in]-1, 1[$ *para o qual se tenha* $f(c) = 0$*?*

Exercício 2.24. *Prove que a equação* $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ *tem três raízes, uma em cada um dos intervalos abertos* $]-1, 0[$*,* $]0, 1[$ *e* $]6, 9[$*. Melhore o resultado aproximando-as até às centésimas.*

Exercício 2.25. *Seja* $f(x) = \operatorname{tg} x$*. Embora* $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ *e* $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$*, não existe nenhum* x *no intervalo* $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ *tal que* $f(x) = 0$*. Será que este facto contraria o Teorema de Bolzano? Justifique.*

Exercício 2.26. *Seja f uma função contínua em $[0,1]$ e $0 \leq f(x) \leq 1$, para todos os valores de $x \in [0,1]$. Mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.*

Exercício 2.27. *Determine os domínios e a expressões analíticas das derivadas das seguintes funções:*

1. $y = \dfrac{5+6x}{1-x^6}$; 2. $y = \sqrt[6]{(x^2+1)^5}$; 3. $y = \cos(1+\operatorname{tg} x)$;

4. $y = 6\operatorname{sen}(x+1) + 3\cos(7x)$; 5. $y = a^x + x^{\ln x}$; 6. $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{3x}$;

7. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$; 8. $y = -4 + 3^{x+1}$; 9. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$;

10. $y = \operatorname{ch} x - \dfrac{x}{e^x}$.; 11. $y = \operatorname{ch}^7(8x-1)$; 12. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^4+1}}$.

Exercício 2.28. *Determine a expressão analítica das derivadas das funções seguintes:*

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + x^3, & x < 0 \end{cases}$; 2. $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & x \leq -1 \\ x^2\ , & -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & x \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 4 \\ 12 - 2x, & x \geq 4 \end{cases}$.

Exercício 2.29. *Mostre que:*

1. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 2. $(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

3. $(\operatorname{arg\,sh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$; 4. $(\operatorname{arg\,ch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \in]1,+\infty[$;

5. $(\operatorname{arg\,th} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x \in]-1,1[$; 6. $(\operatorname{arg\,coth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$.

Exercício 2.30. *Mostre que as funções seguintes são contínuas, mas não deriváveis em alguns pontos:*

1. $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|$, $x \in [0,2\pi]$; 2. $g(x) = \begin{cases} x + \ln(2-x), & x < 1 \\ e^{1-x}, & x \geq 1 \end{cases}$;

3. $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Exercício 2.31. *Determine as expressões analíticas das rectas tangente e normal ao ramo da parábola* $y = \sqrt{x}$ *no ponto de abcissa* $x = 4$.

Exercício 2.32. *A curva* $y = 1/(1 + x^2)$ *é chamada bruxa de Agnesi. Determine uma equação para a recta tangente para essa curva no ponto* $(-1, 1/2)$.

Exercício 2.33. *Se* $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ *e* $g'(3) = 5$, *determine:*

1. $(f + g)'(3)$; *2.* $(fg)'(3)$; *3.* $(f/g)'(3)$; *4.* $(f/(f - g))'(3)$.

Exercício 2.34. *Um insecto rasteja de modo a que a sua posição depois de* t *segundos é dada por*

$$x = \sqrt{1 + t}, \qquad y = 2 + t/3,$$

onde x *e* y *são medidas em centímetros. Determine o vector que indica a velocidade do insecto no instante* $t = 3$ *segundos.*

Exercício 2.35. *A variação da temperatura (em graus Fahrenheit) de um dado alimento num frigorífico pode ser bem modelada pela seguinte função:*

$$T(t) = 10\frac{4t^2 + 16t + 75}{t^2 + 4t + 10}, \ t \geq 0,$$

onde t *representa o tempo decorrido em horas.*

1. *Qual é a temperatura inicial do alimento?*
2. *Qual a temperatura limite a que poderá chegar o alimento se se deixar indefinidamente no frigorífico?*
3. *Determine a taxa de alteração de* T *para* $t = 10$ *horas.*

Exercício 2.36. *O número de bactéria depois de* t *horas num laboratório experimental controlado é dado por* $n = f(t)$.

1. *Qual o significado da derivada* $f'(5)$*? Em que unidades é representada?*
2. *Suponha que existe uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. O que é maior:* $f'(5)$ *ou* $f'(10)$*? Se a oferta de nutrientes for limitada, o que afetaria na sua conclusão? Explique.*

Exercício 2.37. *A eficácia de determinado analgésico t horas após ter sido ministrado (tomado) pode ser significativamente bem modelada pela seguinte função*

$$E(t) = \frac{1}{27}\left(9t + 3t^2 - t^3\right), \ 0 \leq t \leq 5.$$

Determine a taxa de alteração de E relativamente a t nos seguintes casos: passado 1 hora; passado 4 horas.

Exercício 2.38. *A concentração $[S]$ de uma certa substância durante uma reacção enzimática é dada por*

$$[S] = [S_0]e^{-\frac{k}{2,3}t}$$

onde t é o tempo decorrido em segundos, k é uma constante e $[S_0]$ é a concentração da substância no início da reacção.

1. *Arbitrando valores para $k > 0$ e $[S_0]$ trace um gráfico de $[S]$ em função de t.*
2. *Mostre que usando uma mudança de variáveis conveniente se obtém um modelo linear simples (expresso por uma função cujo esboço do gráfico é uma recta).*

Exercício 2.39. *Pensa-se que uma quantidade que está a ser objecto de estudo cresce exponencialmente com o tempo. Várias medições deram os seguintes resultados:*

Tempo (em minutos)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Quantidade	*2*	*15*	*111*	*844*	*6328*	*47461*

Será de facto um crescimento exponencial? (Sugestão: procurar uma função definida por uma expressão da forma $ce^{\alpha t}$ onde c e α são constantes a determinar.)

Exercício 2.40. *Para temperaturas T (em °C) no intervalo $[-50, 150]$ a pressão P de uma botija de gás varia com a temperatura segundo uma lei do tipo $P(T) = MT + b$, onde M e b são constantes. Suponha que um aumento de 40 graus na temperatura causa um aumento na pressão na ordem dos 50 milibares.*

1. *Qual a taxa de variação da pressão em relação à temperatura?*
2. *Que mudança de temperatura provocaria uma queda de pressão da ordem de 9 milibares?*

Exercício 2.41. *Encontre um polinómio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.*

Exercício 2.42. *Para que os valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?*

Exercício 2.43. *Uma linha de telefone pendurada entre dois postes separados de* 14 *metros tem a forma da catenária*

$$y = 20\,\mathrm{ch}(x/20) - 15,$$

em que x e y são medidos em metros.

1. *Calcule a inclinação da curva quando ela encontra o poste da direita.*
2. *Calcule o ângulo θ entre a recta tangente à curva e o poste.*

Exercício 2.44. *A Lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que num certo instante o volume é de* 600 *cm^3, a pressão é de 150 kPa e que pressão cresce a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decresce o volume nesse instante?*

Exercício 2.45. *Uma massa atada a uma mola vertical tem como função posição*

$$s = A \operatorname{sen} \omega t,$$

onde A é a amplitude de sua oscilação e ω a frequência.

1. *Determine a velocidade e aceleração como função do tempo.*
2. *Mostre que aceleração é proporcional ao deslocamento s.*
3. *Mostre que a velocidade é máxima quando a aceleração é nula.*

Exercício 2.46. *Um projéctil é lançado verticalmente do solo com uma velocidade inicial de* 112 *metros por segundo. Após t segundos, a sua distância ao solo é de* $112t - 4,9t^2$ *metros. Determine:*

1. *a velocidade do projéctil para $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$;*
2. *o instante em que o projéctil atinge o solo;*
3. *a velocidade no momento em que este atinge o solo.*

Exercício 2.47. *Determine as derivadas de ordem n das funções:*

1. $\log_a x$; *2.* x^m; *3.* $\operatorname{sen} x$; *4.* $\dfrac{1}{3x+2}$; *5.* $\dfrac{1}{x}$; *6.* $\operatorname{sen} 5x$;

7. $\cos 2x$; *8.* e^{3x}; *9.* $e^x \operatorname{sen} x$; *10.* xe^x; *11.* $\mathrm{ch}\, 3x$.

Exercício 2.48. *Para $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$, mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1, 1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?*

Exercício 2.49. *Use os Teoremas de Bolzano e de Rolle para provar que:*

1. $f(x) = x^3 + 3x + 2$ *tem um zero real;*
2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ *tem três zeros reais.*

Exercício 2.50. *Prove que se* $a > 0$*, a equação cúbica* $x^3 + ax + b = 0$ *não pode ter mais do que uma raiz real, qualquer que seja o valor de* b*.*

Exercício 2.51. *Usando a regra de L'Hospital, determine:*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$; 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$; 6. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$;

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ 12. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

Exercício 2.52. *Verificando que não pode usar a regra de L'Hospital, calcule os seguintes limites:*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

Exercício 2.53. *Determine os valores máximo e mínimo das funções abaixo definidas, no intervalo indicado:*

1. $f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [0, 1]$; 2. $f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$;

3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2]$.

Exercício 2.54. *Averigúe se as funções a seguir indicadas têm algum extremo relativo para* $x = 2$*:*

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ x + 5, & x > 2 \end{cases}$; 2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ -x^2 + 8, & x > 2 \end{cases}$.

Exercício 2.55. *Determine dois números positivos cujo produto seja máximo e cuja soma seja igual a 40.*

Exercício 2.56. *Determine as dimensões do rectângulo de área máxima que pode ser inscrito numa circunferência de raio a.*

Exercício 2.57. *Determine as dimensões do cilindro circular recto de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio a.*

Exercício 2.58. *Cada página de um livro deve ter área de 440 cm^3, com margens de 2,5 cm do lado esquerdo, 2 cm do lado direito, 3 cm em cima e 3 cm em baixo. Determine as dimensões das páginas de modo a ter a área destinada à impressão seja a maior possível.*

Exercício 2.59. *Supondo um peixe a nadar contra uma corrente u a uma velocidade, em relação à água, v ($v > u$), a energia total E requerida para nadar uma distância L é dada por*

$$E(v) = av^3 \frac{L}{v-u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade positiva. Os biólogos verificaram experimentalmente que os peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% superior à velocidade da corrente. Mostre que esse valor corresponde à velocidade que minimiza a energia total requerida para nadar uma distância fixa.

Exercício 2.60. *Um campo petrolífero tem 8 poços que produzem um total de 1600 barris de petróleo por dia. Para cada poço adicional perfurado a produção média por poço decresce de 10 barris diários. Quantos poços adicionais devem ser abertos para maximizar a produção?*

Exercício 2.61. *Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é dada por $I = V/(R+r)$. Se a força resultante é dada por $P = I^2R$, mostre que a força máxima ocorre se $R = r$.*

Exercício 2.62. *A área da pupila de um olho doente, R, varia com a luminosidade x de uma fonte de luz, de acordo com a igualdade*

$$R(x) = \frac{40 + 24\sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}.$$

1. *Sabendo que a sensibilidade do olho, S, é dada pela taxa de variação da área da pupila, escreva S em função de x.*
2. *Determine o valor da luminosidade para o qual é máxima a área da pupila.*
3. *O que acontece aos valores de R e S para níveis muito elevados de luminosidade?*

Exercício 2.63. *Um fabricante de frascos tem um custo de produção diário*

$$c(x) = 180 - 10x + \frac{1}{4}x^2,$$

em que x representa o número de frascos produzidos. Quantos frascos deverá fabricar por dia, por forma a minimizar o custo?

Exercício 2.64. *Determine o domínio de definição, o domínio de continuidade e a segunda derivada da função:*

$$f(x) = \begin{cases} -23 + 4\log_{e^2}|x+6|, & x > -5 \\ 23\ \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4} + 5\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{235}{2} - 26x, & x \leq -5 \end{cases}.$$

Exercício 2.65. *Represente graficamente as seguintes funções:*

1. $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$; *2.* $y = 3x^3 - 9x + 1$; *3.* $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; *4.* $y = \sqrt{3x^2 - 2}$.

Exercício 2.66. *Considere a função real de variável real definida por*

$$f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

Indique o domínio de f e mostre que f é ímpar. Será injectiva? Esboce o gráfico da restrição de f a $]-\infty, 0[$ e, usando o facto de f ser ímpar, complete o gráfico de f.

Exercício 2.67. *Seja $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$. Determine os seus máximos e mínimos locais. Discuta a concavidade o os pontos de inflexão. Finalmente, esboce o seu gráfico.*

Exercício 2.68. *Determine y' sabendo que $5x\cos y = e^{x+y}$.*

Exercício 2.69. *Se V for o volume de um cubo com a aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expande, determine dV/dt em função de dx/dt. Explique o significado das derivadas*

Exercício 2.70. *Um homem com 2 metros de altura anda a uma velocidade de $0,6$ metros por segundo, em direcção a um candeeiro de iluminação que está a 5 metros acima do solo. Com que velocidade se desloca o extremo da sombra?*

Exercício 2.71. *Use a derivação implícita para achar uma equação da recta tangente ao astróide descrito pela equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ no ponto $(-3\sqrt{3}, 1)$.*

Exercício 2.72. *Uma gota de água esférica sofre evaporação a uma taxa proporcional à sua superfície exterior. Como varia o raio?*

Exercício 2.73. *Utilize as equações paramétricas para determinar a equação da tangente à curva nos pontos indicados:*

1. $\rho = 2\cos\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; *2.* $\rho = \frac{1}{\theta}$, $\theta = 2\pi$; *3.* $\rho = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$, $\theta = \pi$.

Exercício 2.74. *Determine a equação da tangente a cada uma das seguintes curvas no ponto correspondente ao valor do parâmetro indicado;*

1. $\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = 8t^2 - 2t + 4 \end{cases}$, $t = 1$; *2.* $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 2$.

Exercício 2.75. *Determine a aproximação linear das seguintes funções em $x_0 = 0$ e os valores de x para os quais essa aproximação tem uma precisão inferior ou igual a 0,1:*

1. $y = \sqrt{1+x}$; *2.* $y = 1 + e^x$; *3.* $y = \operatorname{tg} x$.

Exercício 2.76. *Determine o diferencial dy para as seguintes funções e calcule o seu valor para os valores de x e dx indicados:*

1. $y = (x^2+5)^3$, $x = 1$, $dx = 0{,}05$; *2.* $y = e^{x/4}$, $x = 4$, $dx = 0{,}1$.

Exercício 2.77. *Determine o erro que se comete ao calcular $y = f(x)$ quando se considera uma aproximação x_0 para x obtida com uma precisão $|\Delta x_0| \leq \epsilon$ para os casos seguintes:*

1. $y = x^2$, $x_0 = 1$, $|\Delta x_0| \leq 0{,}5$; *2.* $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $|\Delta x_0| \leq 0{,}1$.

Exercício 2.78. *O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro máximo de 0,2 cm.*

1. *Use as diferenciais para estimar o erro máximo na área do disco calculado.*
2. *Qual o erro relativo? Dê o resultado em termos de percentagem.*

Exercício 2.79. *Suponha que não temos fórmulas para $g(x)$, mas sabemos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2+5}$, para todo x. Use a aproximação linear para estimar $g(1{,}95)$ e $g(2{,}05)$.*

Exercício 2.80. *O período T de oscilação de um pêndulo obtém-se usando a fórmula*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

onde ℓ é o comprimento do pêndulo e $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$ a aceleração da gravidade. Determine o erro que se comete ao calcular T em função de pequenos erros $\Delta\ell$ resultantes das medições de ℓ.

Exercício 2.81. *De acordo com a Lei de Poiseuille, formulada pelo médico e físico francês Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797–1869), quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (volume de sangue por unidade de tempo passando por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso*

$$F = kR^4, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual minúsculo balão na ponta de um catéter, que é insuflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue. Mostre que a variação relativa de F é cerca de quatro vezes a variação relativa de R. De que forma um aumento de 5% no raio afecta o fluxo de sangue?

Exercício 2.82. *Um avião em voo vertical descreve uma trajectória que, para $t \in [0,1]$ dado em minutos, pode ser traduzida pela expressão $h(t) = (t-1)e^t - t + 3$.*

1. *Calcule um valor aproximado do instante em que o avião esteve mais próximo do solo, aplicando o método de Newton duas vezes.*

2. *Aproxime a diferença máxima de altitude que o avião atinge no mesmo intervalo.*

Exercício 2.83. *Considere a função f definida por $f(x) = e^{-x}\ln x$, $x > 0$. Utilizando o método de Newton, aproxime a abcissa do seu ponto de inflexão, em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior ou igual a 1.*

Exercício 2.84. *Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1,0)$.*

Exercício 2.85. *Aplicar o método de Newton ao cálculo da raiz quadrada de um número positivo a. Proceder de maneira análoga para calcular a raiz cúbica de a.*

Exercício 2.86. *Um projéctil é lançado com uma velocidade v_0 e um ângulo α num túnel de altura h e atinge o seu máximo quando α for tal que $\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{2gh/v_0^2}$, onde $g = 9{,}8\ m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Calcular α utilizando o método de Newton, supondo que $v_0 = 10\ m/s$ e $h = 1\ m$.*

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Primitivas

3.1.1 Primitivas imediatas

No capítulo anterior certos problemas foram enunciados na forma: "dada uma função f, determinar a sua derivada f'". Consideremos agora o problema inverso, isto é: "dada a derivada f', determinar a função primitiva f". Por outras palavras, neste capítulo queremos considerar a questão: "dada uma função f, determinar uma função F tal que $F' = f$".

Definição 3.1 (Primitiva)**.** *Uma função F diz-se* primitiva *(ou* anti-derivada*) de f no intervalo I se*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Ao processo de determinação da primitiva F de uma função f chama-se primitivação*.*

Notemos que, se uma função f admitir primitiva, essa primitiva não é determinada de forma única. De facto, se considerarmos $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, podemos ter, como primitiva, $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 10$, $F_3(x) = x^2 + 11{,}4$, etc. Neste caso, as primitivas de f em $\mathbb{R}$ são da forma $F(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Definição 3.2 (Função primitivável)**.** *Uma* função *f diz-se* primitivável *num intervalo I se existir uma primitiva de f em I.*

O próximo resultado demonstra que duas primitivas de uma mesma função diferem apenas por uma constante.

Teorema 3.1. *Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f num intervalo I. Então, a sua diferença é uma função constante em I, isto é,*

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \qquad \forall x \in I,$$

com c uma constante real.

Demonstração: Sejam a e b dois pontos distintos ($a < b$) de I e $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, para todo o $x \in I$. Como F_1 e F_2 são ambas primitivas de f em I temos que

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

o que implica, como G é diferenciável em I, $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ e, como tal, $G(x) = c$, com c uma constante real. De facto, pelo Teorema de Lagrange, como G é diferenciável em I,

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = 0$$

ou seja, $G(b) = G(a)$, com a e b quaisquer dois pontos distintos de I. Provámos assim que $G(x) = c$, para todo o $x \in I$, ou seja $F_1(x) = F_2(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. □

Como consequência do teorema anterior concluímos que todas as primitivas de f são da forma $F + c$, com F uma primitiva de f e c uma constante real.

Definição 3.3 (Integral indefinido)**.** *Chama-se* integral indefinido *(ou* primitiva*) de f em I, e denota-se por*

$$\int f(x)\, dx,$$

a toda a expressão da forma $F(x) + c$, onde F é uma primitiva de f em I e $c \in \mathbb{R}$. Podemos então dizer que o integral indefinido de uma função é o conjunto de todas as suas primitivas.

De acordo com esta definição, ao processo de primitivação também se chama integração. A notação usada para o integral indefinido foi proposta por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) que a começou a usar porque a integração, como iremos ver mais tarde, está intimamente relacionada com somas (o "s", de soma, degenerou em "$\int$"). A partícula "dx", para já, não tem significado especial e serve apenas para indicar a variável independente em relação à qual se está a primitivar.

Geometricamente podemos considerar o integral indefinido como uma família de curvas. Essas curvas são tais que passar de uma para a outra se processa por translação do eixo dos xx.

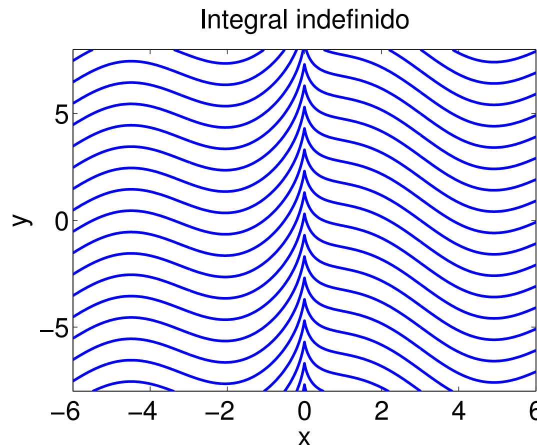


Figura 3.1: Integral indefinido.

Consideremos alguns exemplos.

1. $\displaystyle\int 1\, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

   De facto, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ e $(\ln(-x))' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$.

6. Generalizando a regra dada no exemplo anterior, podemos escrever

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

   ou, noutra notação,

$$\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln|f| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

7. $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\ sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\operatorname{arc\ sen}^2 x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

   De facto,

$$\left(\frac{\operatorname{arc\ sen}^2 x}{2}\right)' = \operatorname{arc\ sen} x (\operatorname{arc\ sen} x)' = \cdots = \operatorname{arc\ sen} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uma questão que se coloca é a seguinte: será que toda a função f possui primitiva? Pode demonstrar-se que toda a função contínua num intervalo I possui, nesse intervalo, uma primitiva. No entanto, existem funções que não possuem primitiva. Essas funções são, naturalmente, funções descontínuas.

Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$$

não é primitivável em $\mathbb{R}$, pois a existência de uma função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, contradiz o Teorema de Darboux. De facto, segundo o Teorema de Darboux, a derivada de qualquer função f tem que que verificar a propriedade do valor intermédio e, neste caso, f não assume todos os valores entre 0 e 1. Notemos também que, pelo Teorema de Darboux, as funções primitiváveis aplicam intervalos em intervalos o que, claramente, não é o caso.

O Teorema de Darboux também garante que as funções primitiváveis não podem ter descontinuídades de primeira espécie. Por isso, para procurar um exemplo de uma função descontínua que seja primitivável, temos que considerar funções com descontinuidades de segunda espécie. Por exemplo, a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

é descontínua, pois não existe o limite de $f'(x)$ quando x tende para 0 mas é primitivável e, como tal, envia intervalos em intervalos.

Vamos agora considerar algumas propriedades das primitivas. As primeiras propriedades resultam, imediatamente, da definição e a sua demonstração é deixada como exercício:

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad \left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x).$$

Outra propriedade é

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

que estabelece que **a primitiva é um operador linear**. De facto, sejam F e G duas primitivas de f e g, respectivamente. Então

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Podemos, então, concluir que

$$\begin{aligned} \int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx &= \alpha F(x) + \beta G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \alpha(F(x) + c_1) + \beta(G(x) + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ &= \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx. \end{aligned}$$

Duas regras de integração muito importantes podem ser obtidas pela generalização do raciocínio efectuado na resolução do exercício anterior.

A primeira é a **regra de integração da potência**, cuja demonstração é deixada como exercício:

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A segunda é a **regra de integração da função composta** e diz que, se F é uma primitiva de f e g é uma função diferenciável, então

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

De facto, pelo teorema da derivada da função composta,

$$(F(g(x)))' = g'(x)F'(g(x)) = g'(x)f(g(x)),$$

o que prova o pretendido.

Exercício 3.1. *Mostre que:*

1. $\displaystyle\int f' f^m \, dx = \frac{f^{m+1}}{m+1} + c,\ m \neq -1,\ c \in \mathbb{R};$

2. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Resolução: Vamos apenas resolver o alínea 1; a alínea 2 resulta imediatamente desta. Considerando $g(x) = x^m$, com $m \neq -1$, temos que

$$\int f'(x) f^m(x) \, dx = \int f'(x) g(f(x)) \, dx.$$

Pela regra de integração da função composta,

$$\int f'(x) g(f(x)) \, dx = G(f(x)) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

com G uma primitiva de g que, pela regra de integração da potência, pode ser dada por $G(x) = x^{m+1}/(m+1)$, o que prova o pretendido. □

3.1.2 Primitivação por partes

O próximo teorema dá-nos a chamada regra de primitivação por partes, que é obtida a partir da regra de derivação do produto de duas funções.

Teorema 3.2 (Primitivação por partes)**.** *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo I tais que f admite uma primitiva F em I e g é derivável em I. Então*

$$\int f(x) g(x) \, dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) \, dx.$$

Demonstração: Temos que

$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) \qquad x \in I.$$

Assim sendo,

$$f(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x), \qquad x \in I,$$

o que nos permite concluir que

$$\int f(x) g(x) \, dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) \, dx,$$

provando assim o pretendido. □

Em linguagem corrente, o teorema anterior pode ser enunciado da seguinte forma: "a primitiva do produto de duas funções é igual à primitiva da primeira vezes a segunda menos a primitiva da que já está primitivada vezes a derivada da segunda".

Exercício 3.2. *Calcule as seguintes primitivas usando a regra de primitivação por partes:*

1. $\displaystyle\int x \ln x \, dx$;

2. $\displaystyle\int \text{arc sen}\, x \, dx$.

Resolução:

1. $\displaystyle\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$
2. Temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\int \text{arc sen}\, x \, dx &= \int 1 \, \text{arc sen}\, x \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}$$

Aquando da aplicação da regra de primitivação por partes, coloca-se a questão de saber qual a função que deve ser primitivada e qual a que deve ser derivada. Temos a seguinte regra de ouro: deve começar por se primitivar o factor que menos se simplifica por derivação. Um quadro que pode ser útil é o seguinte:

	Derivar		Primitivar	
$\int$	função polinomial	$\times$	função trigonométrica	dx
$\int$	função polinomial	$\times$	função exponencial	dx
$\int$	função trigonométrica inversa	$\times$	função polinomial	dx
$\int$	função logarítmica	$\times$	função polinomial	dx

Por vezes é necessário aplicar a regra de primitivação por partes duas (ou mais) vezes. Por exemplo, suponhamos que se pretende determinar

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x - \int e^x(-\,\text{sen}\, x) \, dx \\
&= e^x \cos x + e^x \,\text{sen}\, x - \int e^x \cos x \, dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quando se aplica duas (ou mais) vezes a regra de integração por partes deve manter-se até ao final a escolha feita inicialmente sobre qual a função a primitivar e qual a função a derivar.

3.1.3 Regras práticas para primitivar funções trigonométricas e hiperbólicas

Quando se pretende primitivar potências ímpares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ ou $\operatorname{ch} x$, destaca-se uma unidade à potência ímpar e o factor resultante passa-se para a co-função através das fórmulas fundamentais:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

No caso de se pretender primitivar potências pares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ ou $\operatorname{ch} x$, passa-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1).$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para as potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{th} x$) ou $\operatorname{cotg} x$ ($\operatorname{coth} x$), destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ ($\operatorname{th}^2 x$) ou $\operatorname{cotg}^2 x$ ($\operatorname{coth}^2 x$) e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \qquad (\operatorname{th}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x),$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1, \qquad (\operatorname{coth}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x).$$

Nas potências pares de $\sec x$ ($\operatorname{sech} x$) ou $\operatorname{cosec} x$ ($\operatorname{cosech} x$), destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad (\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x, \qquad (\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1).$$

Para as potências ímpares de $\sec x$ ($\operatorname{sech} x$) ou $\operatorname{cosec} x$ ($\operatorname{cosech} x$), destaca-se $\sec^2 x$ ($\operatorname{sech}^2 x$) ou $\operatorname{cosec}^2 x$ ($\operatorname{cosech}^2 x$) e primitiva-se por partes começando por esse factor.

Consideremos, agora, o caso de produtos de potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas.

Quando se pretende primitivar o produto de uma potência ímpar de $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) por qualquer potência de $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$), destaca-se $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad (\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1).$$

No caso da função a primitivar ser o produto de uma potência ímpar de $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$) por qualquer potência de $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$), destaca-se $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x, \qquad (\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x).$$

Quando o produto é entre uma potência par de $\operatorname{sen} x$ ($\operatorname{sh} x$) e uma potência par de $\cos x$ ($\operatorname{ch} x$), aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, & (\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x), \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, & (\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x), \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \left(\operatorname{sh}^2 x \right. &= \left. \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)\right), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), & \left(\operatorname{ch}^2 x \right. &= \left. \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)\right). \end{aligned}$$

Para terminar esta secção, consideremos o caso de produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{sen} mx$ ou $\cos nx$ ($\operatorname{sh} mx$ ou $\operatorname{ch} nx$). Neste caso aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), & \left(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))\right), \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), & \left(\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))\right), \\ \operatorname{sen} x \cos y &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)), & \left(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))\right). \end{aligned}$$

3.1.4 Primitivação de funções racionais

Consideremos a fracção $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinómios. Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efectua-se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$. Obtém-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

sendo $\dfrac{R(x)}{g(x)}$ uma fracção própria. Para primitivar a fracção própia procede-se de acordo com os seguintes passos.

1. Decomposição do denominador da fracção própria em factores. Os factores obtidos são da forma $(x-a)^n$, correspondendo a raízes reais a de multiplicidade n, ou da forma $\big((x-p)^2 + q^2\big)^m$, correspondendo às raízes imaginárias $p \pm qi$ de multiplicidade m.

2. Decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples. Cada factor do tipo $(x-a)^n$ dá origem a

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a},$$

com A_i, $i = 1, \ldots, n$, constantes a determinar. Cada factor do tipo $\left((x-p)^2+q^2\right)^m$ dá origem a

$$\frac{P_1x+Q_1}{((x-p)^2+q^2)^m}+\frac{P_2x+Q_2}{((x-p)^2+q^2)^{m-1}}+\cdots+\frac{P_mx+Q_m}{(x-p)^2+q^2},$$

com P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$, constantes a determinar.

3. Determinação das constantes. As constantes A_i, $i = 1, \ldots, n$, e P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$, podem ser determinadas conjuntamente pelo método do coeficientes indeterminados.

   Há, no entanto, uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos de seguida. Comecemos por considerar o cálculo dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)(x-a)^n$. Se $n = 1$, temos que (regra do tapa)

$$A_1 = \left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}.$$

   Se $n > 1$, efectua-se a divisão (regra das h's)

$$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h}$$

   dispondo os polinómios por ordem crescente dos seus monómios, obtendo-se

$$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h} = A_1 + A_2h + \cdots + A_nh^{n-1} + \frac{R_n(a+h)}{\psi(a+h)}.$$

   Consideremos, agora, o cálculo dos coeficientes P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)\left((x-p)^2+q^2\right)^m$. Se $m = 1$, temos que

$$\left[P_1x + Q_1 = \frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=p+qi}.$$

   Se $m > 1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (as constantes P_1 e Q_1 podem ser obtidas como no caso $m = 1$).

   Caso apareçam elementos simples da forma

$$\frac{1}{((x-p)^2+c)^m},$$

   estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \frac{1}{((x-p)^2+c)^m}\,dx = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2m-2}\times\frac{x-p}{((x-p)^2+c)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{1}{((x-p)^2+c)^{m-1}}\,dx\right).$$

4. Determinar a primitiva. A primitiva da função racional é a soma das primitivas de cada um dos elementos simples

Exercício 3.3. *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}\,dx.$$

Resolução: Comecemos por dividir os polinómios. Temos que

$$\frac{x^5+x^3+x}{x^4+1} = x + \frac{x^3}{x^4+1}.$$

Logo

$$\int \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}\,dx = \int x + \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercício 3.4. *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx.$$

Resolução: Como já estamos na presença de uma fracção própria, vamos começar por factorizar o denominador.

1. Factorizar o denominador.

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3).$$

2. Obter os elementos simples.

$$\frac{3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

3. Determinação das constantes.
Vamos determinar A e B pelo método dos coeficientes indeterminados. Assim,

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+B)}{(x+1)(x+3)}.$$

Logo

$$\begin{cases} A+B &= 3 \\ 3A+B &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 3-B \\ 9-3B+B &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= -1/2 \\ B &= 7/2 \end{cases}.$$

Concluímos então que

$$\frac{3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{7/2}{x+3}.$$

Os valores de A e de B também poderiam ter sido obtidos pela regra do tapa

$$A = \left[\frac{3x+2}{x+3}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{2}, \qquad B = \left[\frac{3x+2}{x+1}\right]_{x=-3} = \frac{7}{2}.$$

4. Determinar a primitiva.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx &= \int \frac{-1/2}{x+1}\,dx + \int \frac{7/2}{x+3}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2}\ln|x+3| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)^7}{(x+1)}\right| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

Exercício 3.5. *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)}\,dx.$$

Resolução: Como já estamos na presença de uma fracção própria, vamos começar por factorizar o denominador.

1. Factorizar o denominador.

$$(x+1)^2(x^2+4x+3) = (x+1)^3(x+3).$$

2. Obter os elementos simples.

$$\frac{x+2}{(x+1)^3(x+3)} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

3. Determinação das constantes.

   Para obter as constantes vamos proceder da seguinte forma. Os coeficientes A_1 e B determinam-se pela regra do tapa

$$A_1 = \left[\frac{x+2}{x+3}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}, \qquad B = \left[\frac{x+2}{(x+1)^3}\right]_{x=-3} = \frac{1}{8}.$$

   Os coeficientes A_2 e A_3 determinam-se pelo método dos coeficientes indeterminados, obtendo-se (verifique) $A_2 = \frac{1}{4}$ e $A_3 = -\frac{1}{8}$. Concluímos então que

$$\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)} = \frac{1/2}{(x+1)^3} + \frac{1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/8}{x+1} + \frac{1/8}{x+3}.$$

   Uma forma alternativa de obter os A_i, $i = 1,2,3$, é usando a regra dos h's.

4. Determinar a primitiva.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)}\,dx &= \frac{-1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln|x+3| + c \\ &= \frac{-1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/4}{x+1} + \ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right|^{1/8} + c, \ c \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

3.1.5 Primitivação por substituição

Seja f uma função primitivável no intervalo I e seja $x = \phi(t)$ uma função bijectiva e diferenciável de I_1 em I (uma função bijectiva e diferenciável chama-se mudança de variável)

$$I_1 \xrightarrow{\ \phi\ } I \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto x = \phi(t) \longmapsto f(x)$$

Se F é uma primitiva de f temos

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Logo

$$F(\phi(t)) + c = \int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt.$$

Provámos, estão, o seguinte resultado que nos indica como poderemos primitivar por substituição de variável.

Teorema 3.3 (Primitivação por substituição)**.** *Seja f uma função primitivável no intervalo I e ϕ uma mudança de variável de I_1 em I. Então*

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}. \qquad (3.1)$$

Exercício 3.6. *Calcule* $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Resolução: Seja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Temos que $D_f = [-1, 1]$. Consideremos

$$\phi(t) = \operatorname{sen} t, \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Como é fácil de provar, ϕ é bijectiva e diferenciável no seu domínio e, como tal, pode ser usada como mudança de variável. Consideremos, então,

$$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \operatorname{arc\ sen} x.$$

Como $\phi'(t) = \cos t$, temos que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \left(\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\, dt\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x}\\
&= \left(\int \cos^2 t\, dt\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x}\\
&\ \ \vdots\\
&= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x} + c\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\ sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\ sen} x\right) + c\\
&\ \ \vdots\\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\ sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}$$

Torna-se útil, neste contexto, relembrar a noção de diferencial considerada no final do capítulo anterior. Como foi visto, se $x = \phi(t)$, o diferencial de x pode ser dado por $dx = \phi'(t)\, dt$. Assim, a fórmula (3.1) pode ser interpretada como resultante das substituições $x = \phi(t)$ e $dx = \phi'(t)\, dt$.

Exercício 3.7. *Calcule*

$$\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx.$$

Resolução: Temos que o m.m.c.$(2, 3) = 6$. Logo, a mudança de variável a considerar é $x = t^6$. Neste caso, $dx = 6t^5 dt$. Então,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx &= \left(\int \frac{1}{t^3 + t^2} 6t^5 dt\right)_{t=x^{1/6}} = 6\left(\int \frac{t^3}{t+1}\, dx\right)_{t=x^{1/6}} = \cdots \\ &= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln|x^{1/6} + 1| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square\end{aligned}$$

Na internet é possível encontrar várias páginas que permitem calcular primitivas. Uma das mais famosas é: `http://integrals.wolfram.com/`

3.2 Integral definido

3.2.1 Noção de área de uma figura plana

O que é a área de uma figura plana? Informalmente podemos dizer que é "algo que se pode medir e que nos permite ter uma ideia da maior ou menor dimensão da figura". À área associamos um número que nos dá a "medida da área". Por simplificação, a medida da área será designada, muitas vezes, apenas "área".

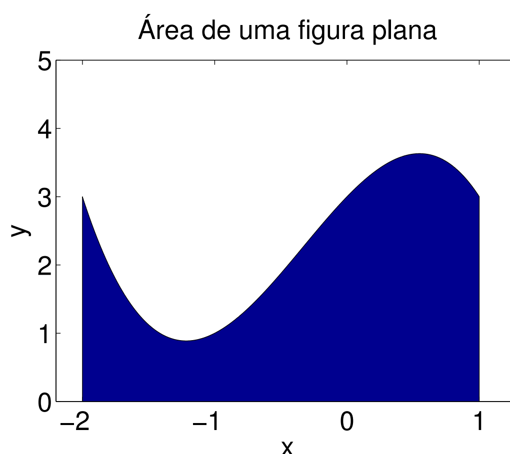


Figura 3.2: Área de uma figura plana.

Como unidade de referência da área tomaremos a medida da área de um quadrado de lado igual à unidade, que dizemos ter "área um". Para saber quanto vale a área de uma figura só temos que ver quantas unidades de área (ou partes dela) cabem na figura.

Consideremos uma função f, não negativa e contínua num intervalo real $[a, b]$. Suponhamos que pretendemos calcular a área A do domínio plano definido pela curva $y = f(x)$, as rectas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos xx. Para isso, comecemos por dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos iguais por meio de um número finito de pontos x_0, x_1, $\ldots$, x_n tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3.2}$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Obtemos assim uma partição do intervalo $[a, b]$. Chamamos amplitude da partição à maior das amplitudes dos intervalos definidos pela partição, isto é, ao valor

$$\Delta x = \max_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Como f é contínua em cada subintervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, pelo Teorema de Weierstrass, f assume um máximo M_i num ponto $\overline{y}_i$ desse intervalo e um mínimo m_i num ponto $\underline{y}_i$ desse intervalo. Consideremos as somas

$$s(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{y}_i)\Delta x_i \quad \text{e} \quad S(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{y}_i)\Delta x_i,$$

onde cada parcela é a área de um rectângulo. Note-se que $s(\Delta x)$ é a área definida por um polígono contido em A e $S(\Delta x)$ a área definida por um polígono que contém A. Então

$$s(\Delta x) \leq A \leq S(\Delta x).$$

Como f é uma função contínua, aumentando o número de pontos da partição ou, de forma equivalente, diminuindo Δx, o valor $m_i = f(\underline{y}_i)$ tende para $M_i = f(\overline{y}_i)$. Por definição de limite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(\overline{y}_i) - f(\underline{y}_i)| < \epsilon,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, e então

$$S(\Delta x) - s(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} (f(\overline{y}_i) - f(\underline{y}_i))\Delta x_i < \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon(b - a).$$

Podemos então dizer que a área A pode ser aproximada por $s(\Delta x)$ ou $S(\Delta x)$ com a precisão que se quiser. Assim,

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} S(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} s(\Delta x).$$

3.2.2 Definição de integral definido

Seja f uma função limitada, não necessariamente contínua, definida no intervalo $[a, b]$. Consideremos a partição (3.2), com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cuja amplitude é Δx. Ao somatório

$$R_f(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i,$$

com $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, chamamos soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$ relativa à partição (3.2), em homenagem ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Note-se que, para cada partição existem muitas somas de Riemann possíveis, bastando para isso variar a escolha dos $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definição 3.4 (Integral definido). *Seja f uma função limitada definida num intervalo fechado $[a, b]$. O* integral definido *de f entre a e b é definido como sendo o limite das suas somas de Riemann quando a amplitude das partições, arbitrariamente escolhidas, tende para zero, isto é,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} R_f(\Delta x). \tag{3.3}$$

Na definição anterior, a a e b chamamos limites de integração e a f chamamos função integranda. Quando o limite existe, f diz-se integrável (ou integrável à Riemann) ou que

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

existe. A afirmação (3.3) significa que, para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se Δx é a amplitude de uma partição de $[a, b]$ com $\Delta x < \delta$, então

$$|R_f(\Delta x) - I| < \epsilon,$$

com

$$R_f(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i \quad \text{e} \quad I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

para qualquer escolha dos números y_i nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da partição considerada. O limite I é chamado limite de uma soma de Riemann.

Exercício 3.8. *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

chamada função de Dirichlet, *em homenagem ao matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). Será que f é integrável em $[0, 1]$?*

Resolução: Consideremos uma partição uniforme de $[0, 1]$ de amplitude Δx, isto é

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

com $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$. Para esta partição vamos determinar as somas de Riemann

$$S_r(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x,$$

escolhendo $y_i \in \mathbb{Q}$ (o que é sempre possível pois em qualquer intervalo real existe sempre um racional), bem como as somas de Riemann

$$S_i(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x,$$

com $y_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o que também é sempre possível). Assim

$$S_r(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x = 1$$

e

$$S_i(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x = 0,$$

o que permite concluir que a função de Dirichlet não é integrável à Riemann. □

A definição de integral foi dada para um função definida num intervalo real $[a, b]$. Isto pressupõe que $a < b$ e que a e b são números reais (finitos). Excluímos, assim, os casos $[a, b]$, com $a > b$, $[a, a] = \{a\}$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ e $]-\infty, +\infty[$. Vejamos agora como generalizar a definição para os dois primeiros casos.

Definição 3.5. *Seja f uma função limitada definida num intervalo $[a, b]$. Se $a = b$ temos que*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Se $a > b$ temos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Um resultado útil é o seguinte, que apresentamos sem demonstração.

Teorema 3.4. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Seja $c \in [a, b]$. Então podemos dizer que f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Como vimos no Exercício 3.8, nem todas as funções limitadas são integráveis. No entanto, pode demonstrar-se o próximo teorema para funções contínuas. De notar que uma função contínua, definida num intervalo fechado, é limitada mas o seu recíproco não é verdadeiro.

Teorema 3.5. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$ e o seu integral é único.*

A analogia do integral com a noção de área apenas vale para funções contínuas e não negativas.

Corolário 3.6. *Seja f uma função contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$ e consideremos a figura limitada pelo gráfico de f, pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo dos xx. A área da figura existe sempre e pode ser obtida por*

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

E no caso de f ser uma função negativa? Será que podemos definir "área orientada" (ou "área com sinal") à custa de um integral? Notemos que se f for uma função contínua definida em $[a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Exercício 3.9. *Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido, identificando-o com uma área que indicará:*

1. $\int_{-3}^{2} (2x+6)\, dx$; *2.* $\int_{-1}^{2} (7-3x)\, dx$;

3. $\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$; *4.* $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$, $a > 0$.

Resolução: Vamos apenas resolver 1 e 3. Considere-se a Figura 3.3.

1. Temos que o integral corresponde à área do triângulo. Assim,

$$\int_{-3}^{2} 2x + 6\, dx = \frac{5 \times 10}{2} = 25.$$

2. Temos que o integral corresponde a um quarto da área do círculo. Assim,

$$\int_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx = \frac{1}{4}(3^2\pi) = \frac{9}{4}\pi. \quad \square$$

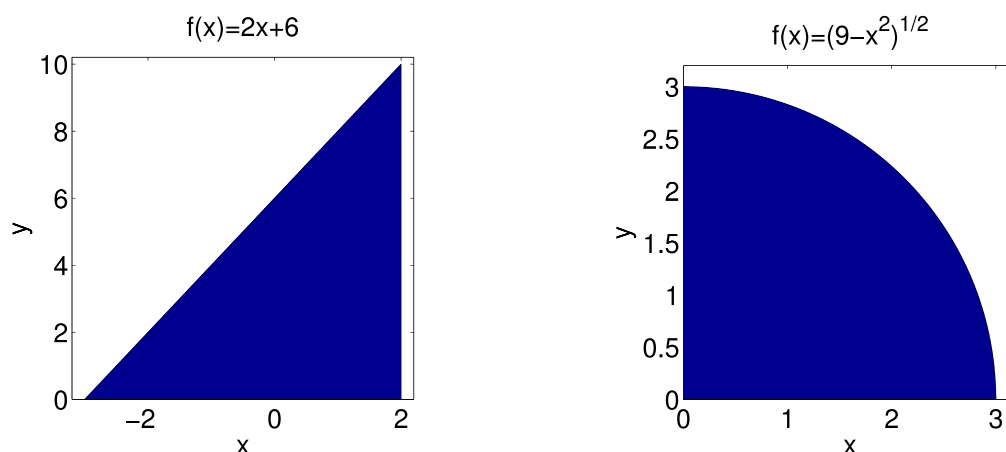


Figura 3.3: Áreas de figuras planas (Exercício 3.9, alíneas 1 e 3).

A resposta à pergunta sobre a existência de integral definido para funções limitadas descontínuas nem sempre é positiva, como vimos no Exercício 3.8. Para garantir a existência e unicidade do integral definido para uma função descontínua é necessário impor, essencialmente, que a função não tenha demasiadas descontinuidades.

Teorema 3.7. *Seja f uma função limitada com um número finito de descontinuidades no intervalo $[a, b]$. Se as descontinuidades forem todas de primeira espécie (incluindo as removíveis), existe e é único o integral definido*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

A demonstração do teorema anterior, que não iremos apresentar, permite concluir uma regra de cálculo para o integral de uma função descontínua nas condições do teorema: se f for descontínua num dos extremos do domínio, proceder como se fosse contínua; se f for descontínua no interior do intervalo, digamos em $c \in]a, b[$, considere as funções

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x < c \\ \lim\limits_{x \to c^-} f(x), & x = c \end{cases}, \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & c < x \leq b \\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x), & x = c \end{cases},$$

e tomar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx.$$

O teorema anterior permite concluir que que as funções que admitem descontinuidades de primeira espécie podem ser integráveis, apesar de não serem primitiváveis.

3.2.3 Propriedades do integral definido

Vamos agora considerar algumas propriedades do integral definido. As demonstrações dessas propriedades resultam imediatamente da definição.

Consideremos duas funções f e g integráveis no intervalo $[a, b]$. Resulta imediatamente, da analogia do integral com uma área, que

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a), \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Outra propriedade é a seguinte, cuja demonstração é deixada como exercício:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora mostrar que o integral de uma função não negativa é não negativo, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

De facto, pela definição de integral definido,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(y_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0.$$

Como consequência imediata desta última propriedade, sai a seguinte, cuja demonstração é deixada como exercício: se $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercício 3.10. *Seja f uma função integrável no intervalo $[a, b]$. Mostre que:*

1. *se m e M são, respectivamente, um minorante e um majorante da função f no intervalo $[a, b]$, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a);$$

2. *o módulo do integral é menor ou igual que o integral do módulo, isto é,*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Resolução: Comecemos por considerar a alínea 1. Como

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para todo o $x \in [a, b]$, conclui-se que, pelas propriedades anteriores,

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx \Leftrightarrow m(b-a) < \int_a^b f(x)\, dx < M(b-a).$$

Para provar a alínea 2 basta ver que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

qualquer que seja o $x \in [a, b]$ e aplicar a alínea anterior. $\square$

A próxima propriedade estabelece que o integral de uma função contínua, não negativa em todo o intervalo e positiva em, pelo menos, um ponto desse intervalo, é um número positivo. Em linguagem mais rigorosa, se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, e $f(c) > 0$, para algum $c \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Para provar este facto, suponhamos que $c \in]a, b[$ (o caso em que $c = a$ ou $c = b$ demonstra-se de forma idêntica). Como $f(c) > 0$ e f é contínua, existe um intervalo $I = [c - \epsilon, c + \epsilon] \subset [a, b]$, com ϵ um real positivo, tal que $f(x) > M$ para algum $M > 0$, para todo o $x \in I$. Assim

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\, dx > 2\epsilon M > 0.$$

Note-se a importância da exigência da continuidade de f. Se f fosse descontínua poderia não ocorrer o pretendido. Considere-se, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \{0{,}5\} \\ 1, & x = 0{,}5 \end{cases}.$$

Neste caso tem-se que $f(x) \geq 0$, $f(0{,}5) > 0$ e

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

A propriedade seguinte é consequência imediata da anterior e a sua demonstração é deixada como exercício: se f e g são duas funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, e $f \neq g$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3.5}$$

3.2.4 Valor médio de uma função

Calcular a média $\bar{y}$ de um número finito de números reais $y_1, ..., y_n$ é uma tarefa muito fácil:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}.$$

Mas como poderemos calcular o valor médio $\bar{f}$ de uma função $y = f(x)$, com $x \in [a,b]$? Recorrendo à noção de de integral como limite das somas de Riemann, podemos definir

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

O seguinte teorema mostra que se f for uma função contínua, existe um ponto $c \in]a,b[$ no qual o valor da função f é exactamente igual ao valor médio da função.

Teorema 3.8 (Primeiro teorema do valor médio)**.** *Se f é uma função contínua no intervalo $[a,b]$, existe um $c \in]a,b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Demonstração: Se f é uma função constante, por (3.4), o resultado é trivial. Suponhamos então que f não é constante. Como f é contínua num intervalo fechado, existem

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Então, como f não é constante, tem-se que $m < f(x) < M$, para algum $x \in [a,b]$. Por (3.5) e usando um raciocínio análogo ao do último exercício, temos que

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a) \Leftrightarrow m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c),$$

o que prova o pretendido. □

Geometricamente, o resultado anterior pode ter a seguinte interpretação para o caso em que f é uma função contínua e positiva no intervalo $[a,b]$: existe um rectângulo de base $b-a$ e altura $f(c)$ entre m e M com a mesma área de f.

O próximo teorema constitui uma generalização do teorema anterior.

Teorema 3.9 (Segundo teorema do valor médio)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e g uma função integrável que não muda de sinal em $[a, b]$. Então, existe um $c \in]a, b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demostração: Se f é uma função constante temos que $f(x) = k$, para todo o $x \in [a, b]$. Então

$$\int_a^b kg(x)\, dx = k \int_a^b g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx,$$

com $c \in]a, b[$. Suponhamos agora que f não é uma função constante e $g \not\equiv 0$ (o caso $g \equiv 0$ é trivial). Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $g(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$. Então, tal como na demonstração do teorema anterior, podemos dizer que existem constantes m e M tais que

$$mg(x) < f(x)g(x) < Mg(x),$$

para algum $x \in [a, b]$. Concluímos então

$$\int_a^b mg(x)\, dx < \int_a^b f(x)g(x)\, dx < M \int_a^b g(x)\, dx$$

o que, atendendo a

$$\int_a^b g(x)\, dx > 0,$$

equivale a dizer

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} = f(c) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Está assim concluída a demonstração. □

3.2.5 O teorema fundamental do cálculo

Vamos, de seguida, apresentar o famoso Teorema Fundamental do Cálculo que evidencia a relação entre a primitivação e a integração. Este teorema foi estabelecido, independentemente, por Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1642–1727).

A fim de perceber melhor a sua demonstração, consideremos f uma função contínua em $[a, b]$ e uma nova função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

com $x \in [a, b]$. Note-se que F depende apenas de x, o limite superior do intervalo de integração; não depende da variável de integração t. Por exemplo, se considerarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, temos que

$$F(x) = \int_0^x t\, dt$$

representa a área do triângulo rectângulo isósceles com catetos de medida x, isto é

$$F(x) = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

Fixando um valor para x, temos que a área é um valor fixo $F(x)$; variando o valor de x, o valor da área também varia, o que evidencia o facto de F ser uma função de x. Este exemplo também permite concluir que $F'(x) = x$, ou seja, a função F definida à custa do integral de f é uma primitiva de f. O Teorema Fundamental do Cálculo permite generalizar este resultado para qualquer função contínua.

Teorema 3.10 (Fundamental do cálculo). *Seja f uma função contínua definida no intervalo real $[a, b]$.*

1. *Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

para todo o $x \in [a, b]$, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

2. *Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demostração:

1. Queremos demonstrar que $F'(x) = f(x)$, ou seja que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Vamos considerar apenas o caso $h \to 0^+$ (o caso $h \to 0^-$ é semelhante). Temos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c_h)h,$$

com $c_h \in]x, x+h[$, onde a última igualdade resulta da aplicação do Primeiro Teorema do Valor Médio. Mas então

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{hf(c_h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x), \quad c_h \in]x, x+h[,$$

o que prova o pretendido.

2. Pelo que foi demonstrado no ponto anterior

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é uma primitiva de f. Assim sendo

$$F(x) = F_1(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

também é uma primitiva de f. Mas então

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - c.$$

Tomando $x = a$ vem que

$$0 = F(a) - c \Rightarrow c = F(a)$$

e, como tal,

$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$

Tomando $x = b$ vem

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a),$$

o que prova o pretendido. □

Do teorema anterior resulta, imediatamente, o seguinte corolário.

Corolário 3.11. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, para $c \in [a, b]$,*

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\, dt = f(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Usam-se, frequentemente, as seguintes notações

$$F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo diz que se f for uma função contínua em $[a, b]$ e F uma sua primitiva, isto é, $F' \equiv f$, então

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{3.6}$$

Ora, como a derivada $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ a variação total de y entre a e b, atendendo a (3.6) podemos dizer que o integral de uma taxa de variação é igual à variação total.

Esta conclusão, muitas vezes referida como o teorema da variação total, tem aplicação em muitas áreas da ciência e da engenharia. Por exemplo, se $C(t)$ representar a concentração do produto de uma reacção química no instante t, então a taxa de reacção é a derivada $C'(t)$. Logo, a variação da concentração entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} C'(t)\, dt = C(t_2) - C(t_1).$$

Outro exemplo, se $V(t)$ for o volume de água num reservatório no instante t, a sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Então, a variação do volume de água no reservatório entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\, dt = V(t_2) - V(t_1).$$

Consideremos agora o problema de calcular a distância percorrida por uma partícula que se move ao longo de uma linha recta com uma velocidade $v(t)$. Se representarmos por $s(t)$ a posição da partícula, temos que $v(t) = s'(t)$ e, tal como vimos anteriormente, o deslocamento da partícula entre os instantes t_1 e t_2 é dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1).$$

Mas o deslocamento é diferente da distância percorrida. Para calcular a distância percorrida temos que ter em atenção o caso em que $v(t) \geq 0$, isto é, quando a partícula se move para a direita, mas também o caso em que $v(t) \leq 0$, isto é, quando a partícula se move para a esquerda. Estes dois casos podem ser tratados em simultâneo se considerarmos o integral de $|v(t)|$. De facto, como se pode concluir facilmente, a distância total percorrida pela partícula entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt.$$

Exercício 3.11. *Uma partícula move-se ao longo de uma recta de tal forma que a sua velocidade no instante t é dada por*

$$v(t) = t^2 - t - 6,$$

medida em metros por segundo. Determine o deslocamento e a distância percorrida pela partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

Resolução: Pelo que foi visto, o deslocamento é dado

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 t^2 - t - 6\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2},$$

isto é, a partícula, no intervalo de tempo dado, moveu-se 4,5 metros para a esquerda.

Para calcular a distância percorrida, notemos que

$$v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2),$$

o que implica $v(t) \leq 0$ em $[1, 3]$ e $v(t) \geq 0$ em $[3, 4]$. Assim, a distância total percorrida pela partícula é

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 (-v(t))\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 = \frac{61}{6},$$

ou seja, cerca de 10,17 metros. □

3.2.6 Integração por partes e por substituição

O Teorema Fundamental do Cálculo permite obter algumas regras de integração de grande interesse.

Integração por partes. Sabemos que, pela regra de primitivação por partes,

$$\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx,$$

em que F é uma primitiva de f. Então,

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = \int f(x)g(x)\ dx\Big|_a^b = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\ dx.$$

Temos então que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\ dx,$$

com F uma primitiva de f.

Exercício 3.12. *Determine*

$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\ dx.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \operatorname{sen} x\ dx &= -x\cos x|_0^\pi - \int_0^\pi 1(-\cos x)\ dx \\ &= -\pi\cos\pi + 0 + \operatorname{sen} x|_0^\pi \\ &= \pi + \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 \\ &= \pi. \quad \square\end{aligned}$$

Integração por substituição. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\phi : I \longrightarrow [a,b]$ uma mudança de variável, isto é, uma função bijectiva e diferenciável em I ($\phi \in C^1(I)$). Sabemos que, pela regra de primitivação por substituição,

$$\int f(x)\ dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}\Bigg|_{x=a}^{x=b} \\ &= \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt\Big|_{t=\phi^{-1}(a)}^{t=\phi^{-1}(b)} \\ &= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt.\end{aligned}$$

Temos então que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\ dt.$$

Exercício 3.13. *Determine*

$$\int_0^{a/b} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx, \qquad a, b > 0.$$

Resolução: Vamos efectuar a mudança de variável

$$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t = \phi(t).$$

Como $\phi'(t) = \dfrac{a}{b} \cos t$ é uma função contínua e $\phi^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{bx}{a}\right)$, o que implica $\phi^{-1}(0) = 0$ e $\phi^{-1}(a/b) = \pi/2$, temos que ϕ é uma mudança de variável de $[0, a/b]$ em $[0, \pi/2]$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{a/b} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2 t}\left(\frac{a}{b}\cos t\right)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} a\cos t \frac{a}{b} \cos t\, dt \\
&= \frac{a^2}{b} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt \\
&= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{a^2}{b}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen}\pi}{4} - 0 + 0\right) \\
&= \frac{a^2\pi}{4b}. \quad \square
\end{aligned}$$

Exercício 3.14. *Determine*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$$

Resolução: Vamos efectuar a mudança de variável

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arc\,tg} t = \phi(t).$$

Temos que (prove):

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\phi'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \text{(função contínua)}$$

e

$$\phi^{-1}(-\pi/2) = \operatorname{tg}(-\pi/4) = -1; \qquad \phi^{-1}(\pi/2) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1+t^2}{2t+t^2-1}\, \frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \cdots \\
&= \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{1/\sqrt{2}}{((t+1)/\sqrt{2})^2 - 1}\, dt \\
&= \cdots \\
&= -\sqrt{2}\, \arg\, \operatorname{th}(\sqrt{2}). \quad \square
\end{aligned}$$

3.3 Integrais impróprios

Na definição de integral definido considerámos funções limitadas f definidas num intervalo finito $[a, b]$. Vamos agora generalizar o conceito para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso em que f é ilimitada. Em ambos os casos o integral é dito impróprio.

Vamos começar por considerar o caso em que o intervalo de integração é infinito. Para isso, consideremos a região que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo dos xx e à direita da recta $x = 1$ (ver Figura 3.4). Poder-se-ia pensar que, como a região é infinita, a sua área também deve ser infinita. Comecemos por considerer o intervalo finito $[1, b]$. Assim, a área à esquerda da recta $x = b$ é dada por

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Atendendo a este resultado temos que $A(b) < 1$, qualquer que seja o b. Além disso,

$$\lim_{b\to+\infty} A(b) = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

A área da região em causa aproxima-se de 1 quando $b \to +\infty$. Assim, dizemos que a medida da área da região infinita é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

Temos a seguinte definição.

Definição 3.6 (Integrais impróprios de 1ª espécie: intervalos infinitos)**.** *Sejam a e b dois números reais arbitrários.*

1. *Se* $\int_a^t f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \geq a$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a,+\infty[$ *a*
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx.$$

2. *Se* $\int_t^b f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \leq b$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $]-\infty,b]$ *a*
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

dizem-se convergentes *se os limites correspondentes existirem e forem finitos; caso contrário dizem-se* divergentes.

3. *Se* $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ *e* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *forem integrais impróprios, qualquer que seja* $c \in \mathbb{R}$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $\mathbb{R}$ *a*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Se ambos os integrais impróprios do segundo membro forem convergentes, o integral imprórpio *do primeiro membro diz-se* convergente*; caso contrário, diz-se* divergente.

Qualquer um dos integrais impróprios definidos na definição anterior pode ser interpretado como uma área desde que f seja uma função não negativa.

Notemos que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx.$$

Ao limite do segundo membro da desigualdade anterior chama-se valor principal (de Cauchy) do integral impróprio e escreve-se

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx.$$

Exercício 3.15. *Diga se são convergentes ou divergentes os seguintes integrais impróprios:*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ *2.* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$

Resolução:

1. Já vimos que o integral é convergente e que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$
2. Embora o gráfico seja semelhante ao da função dada no ponto anterior (ver Figura 3.4), neste caso temos

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \ln|x||_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

Logo, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente. □

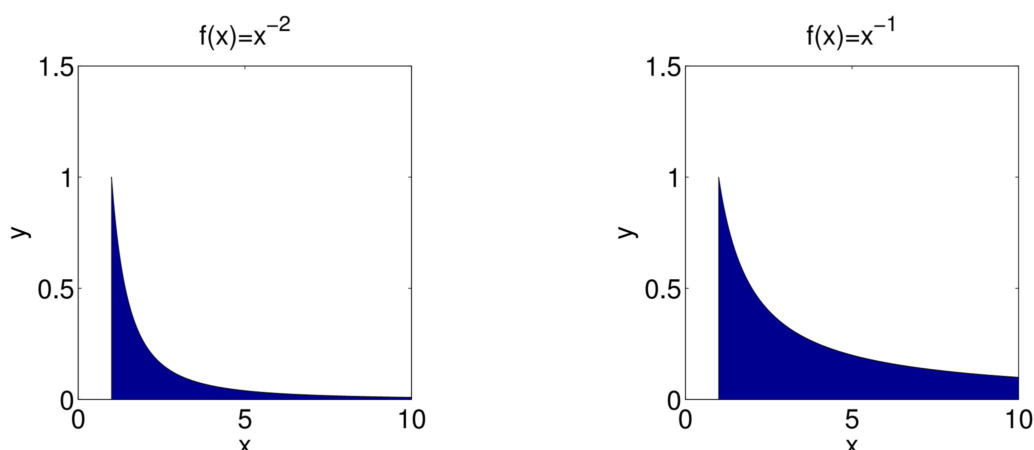


Figura 3.4: Integrais impróprios.

Exercício 3.16. *Mostre que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$$

diverge mas o seu valor principal é igual a zero.

Resolução: Temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t x = +\infty$$

e, como tal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ diverge. No entanto,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} x\,dx = \lim_{c\to+\infty} 0 = 0. \quad \square$$

Note-se que se o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, então

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Para além disso, para qualquer $h > 0$, o integral de f no intervalo $[x, x+h]$ (ou o valor médio de f no mesmo intervalo), tende para zero quando $x \longrightarrow +\infty$.

Vejamos agora o caso em que a função integranda é ilimitada.

Definição 3.7 (Integrais impróprios de 2ª espécie: funções ilimitadas)**.**

1. *Se* $\int_a^t f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \in [a,b[$ *e* $\lim_{x\to b^-} f(x)$ *for infinito, chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a,b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

2. *Se* $\int_t^b f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \in]a,b]$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *for infinito, chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a,b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

O integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

diz-se convergente *se o limite correspondente existir e for finito; caso contrário diz-se* divergente*.*

3. *Se* $\int_a^t f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \in [a,c[$, $\int_t^b f(x)\,dx$ *existe para cada* $t \in]c,b]$ *e* $\lim_{x\to c^\pm} f(x)$ *for infinito, com* $c \in]a,b[$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a,b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se ambos os integrais impróprios do segundo membro forem convergentes, o integral imprórpio *do primeiro membro diz-se* convergente*; caso contrário, diz-se* divergente*.*

Exercício 3.17. *Estude a convergência de*

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Resolução: A função integranda tem uma assímptota em $x = 1$. Então

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Como

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^t = \lim_{t\to 1^-} \ln|t-1| = -\infty,$$

o integral é divergente. □

Se, no exercício anterior, não tivéssemos notado que a função integranda tinha uma assímptota em $x = 1$, poderíamos ter obtido

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2.$$

Este resultado estaria errado!

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exacto do integral impróprio mas, ainda assim, é importante averiguar da sua convergência. Em tais casos o seguinte teorema pode ser útil.

Teorema 3.12 (Primeiro critério de comparação)**.** *Sejam f e g duas funções contínuas e não negativas em $[a, +\infty[$ tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo o $x \geq a$.*

1. *Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente.*
2. *Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.*

Apesar do teorema anterior ter sido enunciado apenas para integrais impróprios de 1ª espécie, onde o intervalo de integração é infinito, ele também é válido para integrais impróprios de 2ª espécie, onde a função integranda é ilimitada.

A demonstração do teorema anterior é omitida. No entanto, o resultado é mais ou menos intuitivo se fizermos a analogia do integral com a área (as funções são não negativas).

Exercício 3.18. *Averigúe da convergência de*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\, dx.$$

Resolução: Como

$$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

é divergente, o integral em causa também é divergente. □

O seguinte corolário resulta imediatamente do teorema anterior.

Corolário 3.13. *Sejam f e g duas funções contínuas e não negativas em $[a,+\infty[$. Se existir uma constante $k>0$ tal que $f(x) \geq kg(x) \geq 0$, para todo o $x \geq c$, com $c \in \mathbb{R}$, então:*

1. *se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente;*
2. *se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente.*

O segundo critério comparação, que iremos apresentar apenas para integrais impróprios de 1ª espécie (mas que também é válido para integrais impróprios de 2ª espécie), resulta como consequência do primeiro critério mas, em certas situações, é de mais fácil aplicação.

Teorema 3.14 (Segundo critério de comparação)**.** *Sejam f e g duas funções contínuas e não negativas em $[a,+\infty[$ tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, para todo o $x \geq a$, e*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

1. *Se $L \in \mathbb{R}^+$, os integrais $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dy$ são da mesma natureza.*
2. *Se $L = 0$, então*
   (a) *se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente.*
   (b) *Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.*
3. *Se $L = +\infty$, então*
   (a) *se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente.*
   (b) *Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente.*

Exercício 3.19. *O integral*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx,$$

com $p \in \mathbb{R}$, quando converge, define uma função chamada função Gama*. Determine o domínio dessa função.*

Resolução: Temos que

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

O primeiro integral é de Riemann se $p \geq 1$ e de 2ª espécie se $p < 1$. O segundo integral é de 1ª espécie qualquer que seja $p \in \mathbb{R}$. Sabemos que o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente. Então, como pela regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = 0,$$

para todo o $p \in \mathbb{R}$, podemos concluir que o integral de 1ª espécie é convergente qualquer que seja o $p \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, também sabemos que o integral impróprio de 2ª espécie $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-p}}\, dx$ é convergente se e só se $1 - p < 1$, isto é, $p > 0$. Além disso,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{1-p}}} = \lim_{x\to0^+} e^{-x} = 1,$$

o que implica que o integral de 2ª espécie é convergente se e só se $p > 0$.

Concluímos que o domínio da função Γ é $\mathbb{R}^+$. □

Note-se que os critérios anteriores só podem ser usados para funções não negativas. O seguinte critério não tem essa exigência mas, por outro lado, obriga a que $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ seja absolutamente convergente, isto é, que $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ seja convergente.

Teorema 3.15 (Terceiro critério de comparação)**.** *Se o integral* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *é convergente, então o mesmo acontece ao integral* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$*.*

Tal como no teorema anterior, apesar deste teorema ter sido enunciado apenas para integrais impróprios de 1ª espécie, onde o intervalo de integração é infinito, ele também é válido para integrais impróprios de 2ª espécie, onde a função integranda é ilimitada.

Exercício 3.20. *Estude a convergência do integral*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx.$$

Resolução: A função integrando no integral impróprio de 1ª espécie dado não é sempre positiva. Mas

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

para todo o $x \geq 1$. Como o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, pelo primeiro critério de comparação o integral

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx$$

também é convergente. Então, pelo teorema anterior o integral em estudo é convergente e diz-se absolutamente convergente. □

3.4 Aplicações do cálculo integral

3.4.1 Cálculo de áreas

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$. A área sob o gráfico de f entre a e b, isto é, a área delimitada pelo gráfico de f, as rectas $x = a$, $y = b$ e o eixo dos xx, é dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Se g é outra função não negativa e contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então a área A limitada pelo grafico de f, o gráfico de g e as rectas $x = a$ e $x = b$, pode ser obtida subtraindo-se da área sob o gráfico de f a área sob o gráfico de g, isto é,

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx.$$

Notemos que não é necessário impor que f e g sejam não negativas. De facto, se tal não acontecer temos que, se f e g forem tais que $f(x) \geq g(x) > -L$, com $L > 0$, a área A limitada pelo gráfico de f, pelo gráfico de g e as rectas $x = a$ e $x = b$, é igual à área limitada pelo gráfico de $f + L$, pelo gráfico de $g + L$ e as rectas $x = a$ e $x = b$. Como $f(x) + L \geq g(x) + L > 0$, temos que

$$A = \int_a^b f(x) + L\, dx - \int_a^b g(x) + L\, dx = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx.$$

Por vezes é necessário determinar a área A de uma região delimitada pelas rectas $y = c$, $y = d$ e pelos gráficos de duas funções $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com f e g contínuas e tais que $f(y) \geq g(y)$, para todo o $y \in [c, d]$. Neste caso temos que

$$A = \int_a^b f(y) - g(y)\, dy.$$

Curvas em coordenadas paramétricas. Consideremos agora uma curva definida pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \qquad t \in [a,b], \tag{3.7}$$

com f uma função bijectiva e diferenciável em $[a,b]$. Assim sendo, f admite inversa em $[a,b]$ as equações paramétricas definem uma função

$$y(x) = g(f^{-1}(x)),$$

para $\in [a,b]$. Temos então que, se $g(t) \geq 0$, para todo o $t \in [a,b]$, b a área sob o gráfico de y entre os valores $x_1 = f(a)$ e $x_2 = f(b)$, isto é, a área delimitada pela curva, as rectas $x = x_1$, $y = y_1$ e o eixo dos xx, é dada por $A = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx$. Efectuando a mudança de variável $x = f(t)$ temos que

$$A = \int_a^b g(t) f'(t)\, dt.$$

Exercício 3.21. *Considere a ciclóide cujas equações paramétricas são*

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a área limitada por esta curva e o eixo dos xx, para $t \in [0, 2\pi]$.

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} r^2 (1 - \cos t)(1 - \cos t)\, dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t - 2\cos t + 1\, dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} - 2\cos t + 1\, dt \\ &= r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} - 2 \operatorname{sen} t + t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= r^2 (\pi + 2\pi) = 3\pi r^2. \quad \square \end{aligned}$$

Exercício 3.22. *Determine a área delimitada pelo astróide*

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\operatorname{sen}^3 t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Resolução: Atendendo à Figura 1.5, temos que

$$A = 4\int_0^r y(x)\, dx = 4\int_{\pi/2}^0 (r\operatorname{sen}^3 t)(-3r\cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = 12r \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t\, dt.$$

Conclua o exercício mostrando que $A = \frac{3}{4}\pi r$. $\square$

Curvas em coordenadas polares. Vamos, finalmente, determinar uma fórmula que nos permita determinar a área de uma figura cujos limites são definidos por uma curva expressa em coordenadas polares. Seja $\mathcal{R}$ uma região do plano limitada pelas curva definida em coordenadas polares por $\rho = f(\theta)$ e pelas rectas $\rho = a$ e $\theta = b$. Suponhamos que $0 < a < b \leq 2\pi$ e que f é uma função contínua em $[a, b]$. Para determinar a medida da área da região $\mathcal{R}$ vamos proceder como anteriormente para as coordenadas cartesianas.

Consideremos a partição

$$a = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = b,$$

como $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta_i$. As rectas $\theta = \theta_i$ dividem a região $\mathcal{R}$ em n sub-regiões definidas por

$$\mathcal{R}_i = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq f(\theta), \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i\},$$

cada uma com área A_i, de modo a que $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i$. Sejam m_i e M_i o valor mínimo e o valor máximo de f no intervalo (fechado) $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Como a medida da área de cada um dos sectores circulares definidos pelas circunferências $\rho = m_i$ e $\rho = M_i$ e as rectas $\theta = \theta_{i-1}$ e $\theta = \theta_i$ é dada, respectivamente, por

$$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\theta_i \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\theta_i,$$

a área A_i da região $\mathcal{R}_i$ é tal que

$$\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\theta_i \leq A_i \leq \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\theta_i.$$

Temos então que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\theta_i \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\theta_i.$$

Tomando a amplitude da partição a tender para zero temos que, uma fez que f é contínua (assume, em $[a, b]$, todos os valores intermédios),

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2\, d\theta.$$

Exercício 3.23. *Determine a área limitada pelo cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ e pelas rectas $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.*

Resolução: Atendendo à Figura 3.5, temos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\theta + 2 \operatorname{sen}\theta \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi + 1. \quad \square \end{aligned}$$

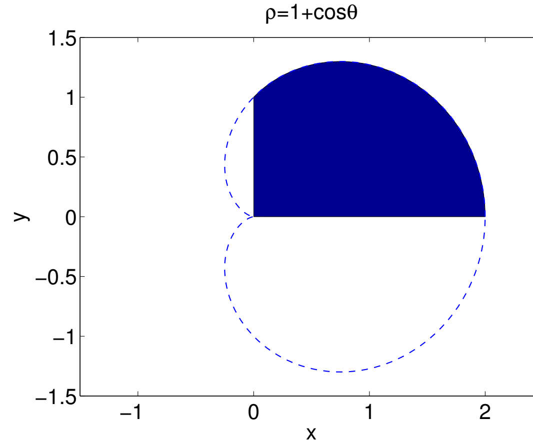


Figura 3.5: Área relativa ao Exercício 3.23.

Exercício 3.24. *Determine a área no interior da circunferência* $\rho = 2\cos\theta$ *e exterior à circunferência* $\rho = 1$.

Resolução: Comecemos por calcular os pontos de intersecção das duas circunferências. Temos que

$$2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Então

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (2\cos\theta)^2 - 1\, d\theta = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3}. \quad \square$$

3.4.2 Comprimentos de curvas planas

Seja f uma função continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$. Vamos procurar um meio de calcular o comprimento da curva definida pelo gráfico de f e cujos extremos são os pontos A e B de coordenadas, respectivamente, $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Seja P_i o ponto de coordenadas $(x_i, f(x_i))$, com $i = 0, \ldots, n$, sendo $P_0 = A$ e $P_n = B$. Estes pontos definem uma linha poligonal que começa em A e acaba em B. O comprimento da curva definida pelo gráfico de f entre a e b pode ser aproximado pelo comprimento da linha poligonal

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

onde

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Atendendo a que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$ temos, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, que existe $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$f'(y_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i},$$

uma vez que f é diferenciável. Assim,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(y_i))^2}$$

e, como tal,

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(y_i))^2} \Delta x_i.$$

Note-se que L_p é uma soma de Riemann para a função contínua e, como tal, integrável,

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Podemos então afirmar que se f for uma função continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$, o comprimento do gráfico de f desde o ponto A de coordenadas $(a, f(a))$ até ao ponto B de coordenadas $(b, f(b))$ é dado por

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

No caso em que a função f não tem derivada contínua em $[a, b]$ mas tem derivada contínua num número finito de intervalos, podemos aplicar o raciocínio exposto em cada um dos intervalos e, no fim, adicionar as parcelas obtidas.

Exercício 3.25. *Determine o comprimento das seguintes curvas:*

1. $f(x) = x$, $x \in [a, b]$;
2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, a]$, $a \in [0, 1]$.

Resolução:

1. Para $f(x) = x$ temos,

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + 1}\, dx = \sqrt{2}(b - a).$$

2. Para $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ temos que $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ e, como tal,

$$L_a^b = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \text{arc sen}\, a.$$

Mas, fazendo $\text{arc sen}\, a = \theta$, concluímos que, na circunferência de raio 1, o ângulo θ (em radianos) coincide com o comprimento do arco com abertura igual a θ. □

Tal como para as áreas, vamos determinar uma fórmula que nos permita determinar o comprimento de uma curva em coordenadas paramétricas. Quando a curva é expressa em coordenadas polares, o cálculo do seu comprimento resulta como um caso particular.

Curvas em coordenadas paramétricas. Consideremos a curva $\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)), t \in [a, b]\}$ que supomos ser suave (f e g são continuamente diferenciáveis em $[a, b]$) e que não se intersecta a si própria. Procedendo como anteriormente, prova-se que a distância entre a e b ao longo da curva, isto é, o comprimento da curva desde o ponto de coordenadas $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$, é dado por

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt.$$

Exercício 3.26. *Determine o comprimento do astróide*

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\,\mathrm{sen}^3\, t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Resolução: Temos que

$$L_0^{2\pi} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

com

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (-3r\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t)^2 = 9r^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2\, t$$

e

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (3r\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t)^2 = 9r^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2\, t.$$

Logo

$$L_0^{2\pi} = 12r\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{sen}\, t\; dt = 6r. \quad \square$$

Curvas em coordenadas polares. Seja agora $\mathcal{C}$ a curva definida em coordenadas polares por $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [a, b]$. Então, $x = f(\theta)\cos\theta$ e $y = f(\theta)\sin\theta$ e, pelo que foi visto,

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{((f(\theta)\cos\theta)')^2 + ((f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)')^2}\, dt.$$

Mas,

$$\big((f(\theta)\cos\theta)'\big)^2 = \big(f'(\theta)\big)^2\cos^2\theta + f^2(\theta)\,\mathrm{sen}^2\,\theta - f'(\theta)f(\theta)\sin 2\theta$$

e

$$\big((g(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta)'\big)^2 = \big(f'(\theta)\big)^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + f^2(\theta)\cos^2\theta + f'(\theta)f(\theta)\sin 2\theta.$$

Logo

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, dt.$$

Exercício 3.27. *Determine o comprimento da espiral logarítmica $\rho = e^\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$.*

Resolução: Temos que

$$L_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2e^{2\theta}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^\theta\, dt = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1). \quad \square$$

3.4.3 Volumes de sólidos de revolução

Consideremos um sólido S que está definido entre os planos $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano que passa por $x \in [a, b]$ e é perpendicular ao eixo dos xx é $A(x)$, onde A é uma função contínua, pode demonstrar-se que a medida do volume do sólido S (que iremos designar apenas por "volume") é dada por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{3.8}$$

Nesta secção estamos interessados em calcular o volume de um **sólido de revolução**, isto é, de um sólido obtido pela rotação de uma região do plano em torno de uma recta desse mesmo plano. A recta em torno da qual se efectua a revolução é chamada **recta de revolução**. Notemos que ao rodarmos uma curva (em vez de uma superfície plana) obtemos uma **superfície de revolução** (em vez de um sólido de revolução).

Consideremos o cilindro (Figura 3.6) obtido à custa da rotação de um rectângulo. O volume do cilindro de revolução gerado por um rectângulo de largura r e altura h, cuja área é dada por $A = rh$, é dado por

$$V = \pi r^2 h.$$

Outro exemplo é o cone (Figura 3.7) gerado pela rotação de um triângulo. O volume do cone gerado pela rotação do triângulo de base r e altura h, cuja área é $A = \frac{1}{2}rh$, é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

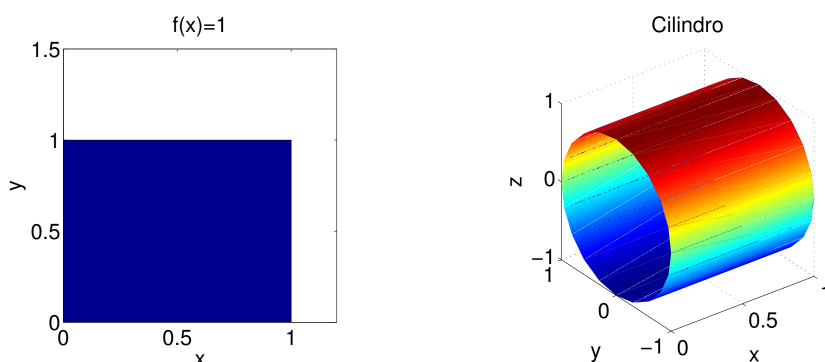


Figura 3.6: Cilindro.

Como determinar o volume de um sólido de revolução conhecendo a curva que o delimita? Para responder a esta questão, vamos considerar dois métodos: o método das fatias e o método das cascas cilíndricas.

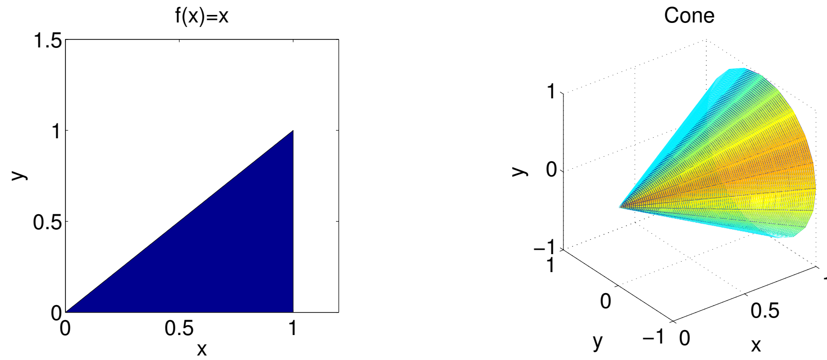


Figura 3.7: Cone.

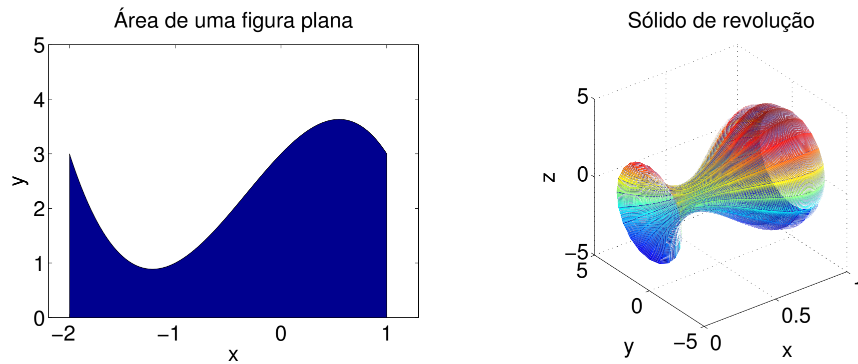


Figura 3.8: Sólido de revolução.

Método das fatias. Consideremos a região limitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$. Notemos que, se $y = f(a)$ (função constante), o volume do sólido de revolução (cilindro) é

$$\pi(f(a))^2(b-a),$$

isto é, a área da base circular vezes a altura. E se f não for constante? Neste caso, consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3.9}$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e os rectângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(y_i)$. O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desses rectângulos em torno do eixo dos xx é dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(y_i))^2 \Delta x_i,$$

que pode ser visto como uma soma de Riemann para a função πf^2. Como f é contínua, a função πf^2 é contínua pelo que o seu integral existe sempre. Podemos então estabelecer o seguinte método de cálculo do volume de sólidos de revolução, que apresentamos sob a forma de teorema.

Teorema 3.16 (Método das fatias). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da figura limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ existe sempre e é dado por*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

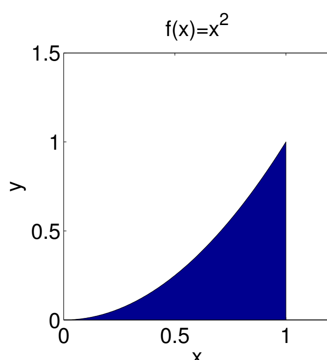
Note-se que não é necessário impor que f seja positiva. De facto, se f for nula em algum intervalo o valor do volume (como seria de esperar) é zero nesse intervalo; se f for negativa, o volume é o mesmo que o respeitante a $-f$, como acontece na realidade.

Exercício 3.28. *Calcule a medida do volume dos sólidos de revolução gerados pela rotação das regiões delimitadas pelas seguintes curvas em torno do eixo dos xx:*

1. $f(x) = x^2$, $\quad x \in [0, 1]$ *(Figura 3.9)*;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad x \in [1, +\infty[$ *(Figura 3.10)*.

Resolução:

1. Para $f(x) = x^2$ temos $V = \pi \displaystyle\int_0^1 x^4\, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.



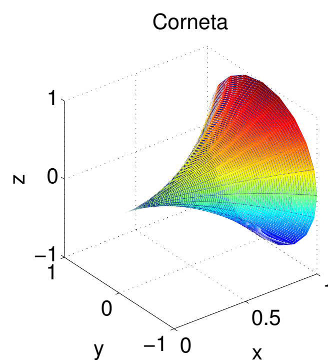


Figura 3.9: Corneta.

2. Para $f(x) = \frac{1}{x}$ temos

$$V = \pi \int_1^{+\infty} x^{-2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \pi(-x)^{-1}\Big|_1^t = \pi \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = \pi.$$

Notemos que, neste caso, o volume é finito enquanto que a "área" $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ é infinita. □

Vamos agora calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da figura limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de duas funções contínuas f e g, definidas em $[a, b]$, que, para efeitos de compreensão geométrica, podemos considera-las

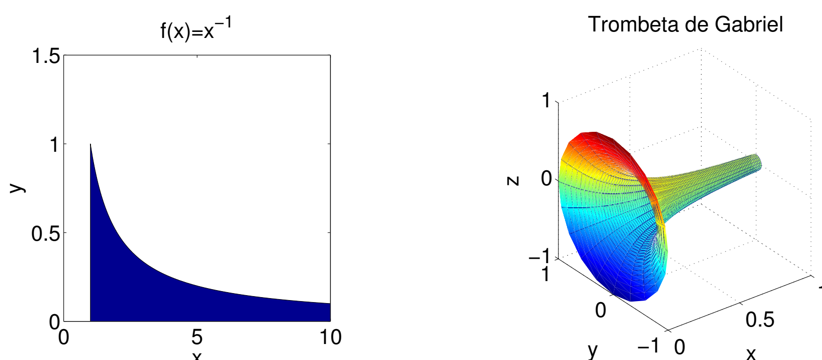


Figura 3.10: Trombeta de Gabriel.

não negativas. Suponhamos que $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$. Podemos dizer, tal como no cálculo de áreas, que o volume pretendido é dado por

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \pi \int_a^b g^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, dx.$$

Tal como para o cálculo de áreas, é possível obter, por mudança de variável, fórmulas semelhantes às aqui obtidas quando se consideram sólidos de revolução obtidos pela rotação de figuras planas em torno do eixo dos yy. Consideremos duas funções contínuas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com $y \in [c,d]$, tais que $f(y) \geq g(y)$, para todo o $y \in [c,d]$. Assim, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da figura plana limitada pelos gráficos de f e g e pelas rectas $y = c$ e $y = d$ é dado por

$$V = \pi \int_c^d f^2(y) - g^2(y)\, dy.$$

Método das cascas cilíndricas. Consideremos, de novo, a região limitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$. Queremos determinar agora o volume do sólido que se obtém rodando essa região em torno do eixo dos yy. Considerando, mais uma vez, a partição (3.9), com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (ponto médio de $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e os rectângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(y_i)$. A rotação desses rectângulos em torno do eixo dos yy dá origem a uma casca cilíndrica, que é um sólido de revolução com volume

$$2\pi \times \text{altura} \times \text{raio médio} \times \text{espessura} = 2\pi f(y_i) y_i \Delta x_i.$$

Procedendo como para o método das fatias, podemos estabelecer o seguinte método de cálculo do volume de sólidos de revolução, que apresentamos sob a forma de teorema.

Teorema 3.17 (Método das cascas cilíndricas)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ $(0 \leq a)$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos yy da figura limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ existe sempre e é dado por*

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Exercício 3.29. *Determine o volume do sólido que se obtém pela rotação em torno do eixo dos yy da região limitada por* $y = 2x^2 - x^3$ *e* $y = 0$.

Resolução: Pelo método das cascas cilíndricas temos que

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x(2x^2 - x^3)\, dx = \frac{16}{5}\pi. \quad \square$$

3.4.4 Outras aplicações do cálculo integral

As aplicações do cálculo integral são muitas e variadas e podem ser encontradas em todos áreas da ciência e da engenharia. Vamos apenas referir algumas delas. Muitas mais podem ser vistas em [1, 12, 13].

Centro de massa. A primeira está relacionada com o cálculo do centro de massa de uma placa plana (lâmina) com densidade uniforme. Suponhamos que a placa com a forma de uma região limitada pelo gráfico de uma função contínua f definida num intervalo $[a, b]$, pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo dos xx. Prova-se que o centro de massa (ou centóide) da lâmina é o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, com

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Força hidrostática. Na física define-se a pressão hidrostática P, exercida por um líquido a uma profundidade h, como sendo o peso do líquido contido numa coluna de altura h e área de secção transversal igual a uma unidade. A pressão também pode ser encarada como a força exercida pelo líquido por unidade de área. Denotando a densidade por ρ (peso por unidade de volume) então, à profundidade h, temos que $P = \rho h$, onde as unidades de ρ e h devem ser consistentes.

Consideremos uma lâmina com a forma da região do plano limitada pelos gráficos $y = c$, $y = d$, $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$ tais que $f(y) \geq g(y)$, para todo o $y \in [c, d]$. Suponhamos que uma lâmina foi submersa num líquido de densidade ρ e que a superfície do líquido é dada por $y = h$. A força (hidrostática) exercida pelo líquido sobre a placa é dada pelo produto da pressão pela área e prova-se que é dada por

$$F = \int_c^d \rho(h - y)\,(f(y) - g(y))\; dy.$$

Biodisponibilidade de um fármaco. A quantidade total de fármaco absorvido após administração de uma só dose desta substância activa é considerado o mais importante parâmetro na avaliação da sua biodisponibilidade. Esse parâmetro, expresso em mg/mL $\times$ h, é dado pela área sob a curva (ASC) de concentração C, em mg/mL, do fármaco na corrente sanguínea como função do tempo t em horas, para $t \in [0, +\infty[$.

Exercício 3.30. *Determine a ASC de um fármaco cuja concentração na corrente sanguínea foi estimada como sendo dada por*

$$C(t) = 15te^{-0,2t}.$$

Resolução: A área pretendida é dada por

$$\text{ASC} = 15\int_0^{+\infty} te^{-0,2t}\,dt = 15\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-0,2t}\,dt.$$

Usando a fórmula de integração por partes tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-0,2t}\,dt &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{-0,2t}}{-0,2}t - \int\frac{e^{-0,2t}}{-0,2}\,dt\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-5e^{-0,2t}t + 5\frac{e^{-0,2t}}{-0,2}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-5e^{-0,2t}t - 25e^{-0,2t}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-5e^{-0,2b}b - 25e^{-0,2b} + 25\right) \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-5e^{-0,2b}b\right) + 25 = 25,
\end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^{0,2b}} = 0,$$

uma vez que, para valores suficientemente grandes, a exponencial cresce mais rapidamente que qualquer polinómio. A mesma conclusão poderia ter sido obtida pela Regra de L'Hospital. Concluímos então que

$$\text{ASC} = 15\times 25 = 375. \quad \square$$

3.5 Fórmula do trapézio*

Nesta secção vamos obter e analisar uma fórmula de quadratura numérica que permite determinar, de forma aproximada, o integral definido

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.10}$$

de uma função real de variável real f num dado intervalo real $[a,b]$.

Em muitas situações, o cálculo de (3.10) não pode ser efectuado através do cálculo de uma primitiva de f, como é o caso de, por exemplo,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Neste caso a função integranda não possui uma primitiva que se possa obter como soma finita de funções elementares. Pode ainda acontecer que o valor de f seja conhecido apenas

em alguns pontos do intervalo $[a, b]$. Podemos então efectuar o cálculo aproximado do integral. Um dos processos para efectuar tal cálculo aproximado designa-se por fórmula (ou regra) do trapézio.

Seja f uma função conhecida em $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, com $x_k = x_0 + kh$ e $h = (b-a)/n$. Assim sendo, temos que

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx.$$

As fórmulas mais usuais permitem obter aproximações a $I(f)$ aproximando, em cada intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, a função f por uma função mais simples, normalmente um polinómio.

Vamos considerar o caso em que pretendemos aproximar, em cada intervalo I_k, $k = 1, \ldots, n$, a função f, definida nesse intervalo, pela recta que passa pelos pontos

$$(x_{k-1}, f(x_{k-1})) \quad \text{e} \quad (x_k, f(x_k)),$$

isto é,

$$f(x) \approx f(x_{k-1})\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_{k-1})\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}) \right) dx \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].
\end{aligned}$$

Obtivemos, assim, a chamada fórmula do trapézio (composta)

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].$$

A fórmula do trapézio (simples) é a que se obtém quando se considera $n = 1$, isto é,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \tag{3.11}$$

Exercício 3.31. *Seja*

$$I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\, dx.$$

Calcule, usando a fórmula do trapézio, o valor aproximado de I com $n = 5$.

Resolução: Seja $f(x) = xe^{2x}$ e $n = 5$. Assim sendo, necessitamos de 6 pontos igualmente distanciados no intervalo $[-2, -1]$ para obter uma aproximação ao valor de I usando a fórmula do trapézio. Temos então que,

$$I \approx 0{,}1[f(-2) + 2f(-1{,}8) + 2f(-1{,}6) + 2f(-1{,}4) + 2f(-1{,}2) + f(-1)] = -0{,}0788762.$$

Podemos escrever $I \approx -0{,}079$. □

O valor do integral de uma determinada função f num intervalo $[a, b]$ pela fórmula do trapézio pode ser dado de acordo com o seguinte algoritmo.

Algoritmo 3.1 Fórmula do trapézio

Dados: f, a, b e n

$h := (b - a)/n$

$x := a$

$s := 0$

Para k de 1 até $n - 1$ fazer

$x := x + h$

$s := s + f(x)$

$IT := (h/2)(f(a) + 2s + f(b))$

Resultado: $I \approx IT$

Prova-se que o erro que se comete na aproximação $I(f) \approx I_T(f)$, com $I_T(f)$ o valor do integral obtido pela fórmula do trapézio (composta), é dado por

$$E_T(f) = I(f) - I_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c), \qquad c \in]a, b[.$$

Na prática a fórmula do erro aparece, normalmente, em valor absoluto. É usual considerar a expressão

$$|E_T(f)| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \quad \text{com} \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Exercício 3.32. *Seja* $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x} dx$. *Calcule, usando a fórmula do trapézio, o valor aproximado de I com três casas decimais correctas.*

Resolução: Seja $f(x) = xe^{2x}$. Temos que, para $x \in [-2, -1]$, o erro para a fórmula do trapézio é dado por

$$|E_T(x)| \leq \frac{1}{12}h^2 M_2 = \frac{1}{12M^2}M_2,$$

sendo

$$M_2 = \max_{x\in[-2,-1]} |f''(x)| = \max_{x\in[-2,-1]} (-4e^{2x}(x+1)).$$

Se tomarmos $g(x) = -4e^{2x}(x + 1)$ temos que $g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1{,}5$. Logo

$$M_2 = \max\{g(-2), g(-1{,}5), g(-1)\} = 2e^{-3}.$$

Vamos então determinar qual o menor valor de M que satisfaz

$$\frac{e^{-3}}{6M^2} \leq 0{,}5 \times 10^{-3}.$$

Efectuando os cálculos, concluímos imediatamente que $n \geq 4{,}074$ o que implica $n = 5$. Necessitamos de 5 pontos igualmente distanciados no intervalo $[-2, -1]$ para obter uma aproximação ao valor de I com três casas decimais correctas. Assim, pelo exercício anterior, $I \approx -0{,}079$. □

3.6 Exercícios práticos

Exercício 3.33. *Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente. É verdade que:*

1. $F+G$ *é uma primitiva de* $f+g$*?*
2. FG *é uma primitiva de* fg*?*
3. F/G *é uma primitiva de* f/g*?*

Exercício 3.34. *Seja F uma primitiva de f. Prove que:*

1. *se F é uma função par, então f é uma função ímpar;*
2. *se F é uma função ímpar, então f é uma função par.*

Exercício 3.35. *Calcule as primitivas das funções indicadas:*

1. $\operatorname{sen} x + \dfrac{3}{1+x^2}$;
2. $(a+bx^3)^2$;
3. $\dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$;
4. $\dfrac{\ln x}{x}$;
5. $\dfrac{e^{\operatorname{arc\ tg} x} + x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}$;
6. $\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$;
7. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$;
8. 4^{2-3x};
9. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$;
10. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}$;
11. $e^{\operatorname{tg} x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12. $e^{4x+x^2+3}(x+2)$;
13. $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$;
14. $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$;
15. $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}$;
16. $\dfrac{1}{9+4x^2}$;
17. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$;
18. $\dfrac{x^3}{x^8+5}$;
19. $\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$;
20. $a^x \cos(a^x)$;
21. $\operatorname{sen}(\cos x)\operatorname{sen} x$;
22. $x\sec^2(3-2x^2)$;
23. $\dfrac{x}{\cos^2 x^2}$;
24. $\operatorname{cosec}^2\left(\sqrt{3}x+5\right)$;
25. $x\operatorname{cosec}^2(3x^2)$;
26. $\dfrac{1}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$;
27. $\sqrt{2}x\sec(5x^2+7)$;
28. $a^{2x}\operatorname{cosec}(a^{2x})$;
29. $\dfrac{2x^3}{\operatorname{sen}^2(3x^4)} + \sec^2(5x)$;
30. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}$.

Exercício 3.36. *Calcule, utilizando o método de primitivação por partes, as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $e^{3x}(2x+3)$; *2.* $(\ln x)(2x+3)$; *3.* $x^2 \ln x$; *4.* $e^x \operatorname{sen} x$;

5. $e^{ax} \operatorname{sen} bx$; *6.* $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$; *7.* $x \cos x$; *8.* $x \sec^2 x$;

9. $(1-x)e^{1+2x}$; *10.* $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$; *11.* $\ln (x+1)^2$; *12.* $\ln \left(a^2+x^2\right)$;

13. $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$; *14.* $\operatorname{sen}(\ln x)$; *15.* $\cos(\ln x)$; *16.* $\operatorname{arc\ tg} \dfrac{1}{x}$;

17. $\sec^3 x$; *18.* $x \operatorname{sen} x \cos x$.

Exercício 3.37. *Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $\operatorname{sen}^3 x$; *2.* $\operatorname{sen}^4 x$; *3.* $\operatorname{tg}^3 x$; *4.* $\sec^4 x$;

5. $\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$; *6.* $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x$; *7.* $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$.

Exercício 3.38. *Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$; *2.* $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; *3.* $\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)}$; *4.* $\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$;

5. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$; *6.* $\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$; *7.* $\dfrac{x^2+2x-5}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

Exercício 3.39. *Calcule, utilizando o método de substituição, as primitivas de:*

1. $x^2\sqrt{4-x^2}$; *2.* $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; *3.* $\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)^2}{e^x+1}$;

4. $\dfrac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}$; *5.* $\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}}$; *6.* $\dfrac{1}{3+2\cos x}$.

Exercício 3.40. *Determine uma função F tal que*

$$F''(x) = 2x^{-1}, \quad F'(1) = 3 \quad e \quad F(1) = 0.$$

Exercício 3.41. *Para cada uma das funções definidas em* $\mathbb{R}$ *pelas expressões*

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad e \quad \frac{x}{1+x^4}$$

obtenha, se possível,

1. *a primitiva que se anula em* $x = 0$*;*
2. *a primitiva que tende para* 1 *quando* x *tende para* $+\infty$*.*

Se para algum caso for impossível obter uma primitiva que verifique a condição requerida, explique a razão dessa impossibilidade.

Exercício 3.42. *Mostre que, se* f *é integrável em* $[-a, a]$*, então*

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, *se* f *é par;*
2. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, *se* f *é ímpar.*

Faça uma interpretação geométrica destes resultados.

Exercício 3.43. *Aplicando o exercício anterior, mostre que são nulos os seguintes integrais:*

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$; 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{sen}^2\,x\,dx$.

Exercício 3.44. *Calcule os seguintes integrais definidos:*

1. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1-4x^3}{x-x^4}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,\mathrm{arc\ tg}\,x^2\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{arc\ tg}\,x}{1+x^2}\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\left(\ln x^2\right)}{x}\,dx$;
7. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(3x + \left|x^2-4x-5\right|\right)\,dx$;
8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\,x\,dx$;
9. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\,dx$;
10. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$;
11. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}\,x}{e^x}\,dx$;
12. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$;
13. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\,\mathrm{sen}\,2x\,dx$;
14. $\displaystyle\int_{0}^{8} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,dx$;
15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}^3\,x\,dx$;
16. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2x^2-x+1}{3(x+1)(x^2+1)}\,dx$;
17. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

Exercício 3.45. *Calcule*

1. $\int_0^{2\pi} |\cos x| \; dx$; *2.* $\int_{-1}^{2} x\,|x| \; dx$.

Exercício 3.46. *Calcule*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

usando a mudança de variável $x = \operatorname{tg} t$.

Exercício 3.47. *Mostre que se* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *então*

$$-2\pi \leq \int_0^{2\pi} f(x) \; dx \leq 2\pi.$$

Exercício 3.48. *Prove as seguintes desigualdades:*

1. $\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \; dx \leq \frac{1}{10}$; *2.* $\int_1^{e^2} \frac{x \, \ln x}{(1+x^2)^2} \; dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^4}$.

Exercício 3.49. *Determine uma função* f *contínua e uma constante* α *de modo que, para todo o* x *real, se tenha:*

1. $\int_\alpha^x f(t) \; dt = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$; *2.* $\int_\alpha^x f(t) \; dt = \cos(2x) + 1$.

Exercício 3.50. *Determine uma função contínua* f *de modo que*

$$3 \int_0^x f(t) \; dt = x\, f(x)$$

e $f(1) = 2$.

Exercício 3.51. *Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, calcule as derivadas das funções a seguir definidas:*

1. $\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} \; dt$, $x > 0$; *2.* $\int_2^x \frac{\cos y}{y} \; dy$, $x > 0$; *3.* $\int_1^{\ln x} \operatorname{sen}(y + e^y) \; dy$, $x > 0$.

Exercício 3.52. *Quais dos seguintes símbolos representam integrais impróprios, quais representam integrais definidos e quais não representam nem uma coisa nem outra?*

1. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$; *2.* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; *3.* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,dx$; *4.* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \operatorname{sen} x\,dx$;

5. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$; *6.* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2-u}\,du$; *7.* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2-4}\,dx$.

Exercício 3.53. *Averigúe a natureza dos seguintes integrais e indique os seus valores no caso de serem convergentes:*

1. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$; *2.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$; *3.* $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$; *4.* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$;

5. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{4/5}}\,dx$; *6.* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$; *7.* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; *8.* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$;

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$; *10.* $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$; 11. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{1-x}\,dx$; *12.* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$;

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$; *14.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$; *15.* $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx$; *16.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

Exercício 3.54. *Mostre, usando a definição, que o integral impróprio*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

é convergente e de valor $\dfrac{1}{\alpha-1}$, *se* $\alpha > 1$, *e divergente se* $\alpha \leq 1$.

Exercício 3.55. *Mostre, usando a definição, que o integral impróprio*

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

é convergente e de valor $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, *se* $\alpha < 1$, *e divergente se* $\alpha \geq 1$.

Exercício 3.56. *Mostre que o integral impróprio*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

é convergente. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *e interprete o integral impróprio como o valor de uma área.*

Exercício 3.57.

1. *Mostre que os seguintes integrais impróprios são divergentes:*

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx;$ *(b)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x}\,dx;$ *(c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

2. *Calcule:*

   (a) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx;$ *(b)* v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x}\,dx;$ *(c)* v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

Exercício 3.58. *Estude a convergência de cada um dos seguintes integrais:*

1. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx;$ (*Sugestão:* $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ *para* x *"grande"*)
2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+e^x}\,dx;$ (*Sugestão:* $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+e^x}\right| \leq \dfrac{1}{e^x}$)
3. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x+1}{3x^4-x+2}\,dx;$ (*Sugestão: compare com* $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$)
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx;$ (*Sugestão: compare com* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} -\frac{1}{x}\,dx$)
5. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$ (*Sugestão: compare com* $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\,dx$)

Exercício 3.59. *O integral*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

com $p, q \in \mathbb{R}$, *quando converge, define uma função chamada* função Beta. *Determine o domínio dessa função.*

Exercício 3.60. *Determine a medida da área da região limitada por:*

1. *a parábola* $y = \dfrac{x^2}{2}$ *e as rectas* $x = 1$, $x = 3$ *e* $y = 0$;
2. *a parábola* $x = 2 - y - y^2$ *e o eixo das ordenadas;*
3. *a curva* $y = \operatorname{sh} x$ *e as rectas* $x = 6$ *e* $y = -2$;
4. *as curvas* $y = \operatorname{sen} x$ *e* $y = \cos x$ *entre dois pontos consecutivos das suas intersecções;*
5. *a parábola* $x = 4 - y^2$ *e o eixo dos yy;*
6. *a curva* $y = \ln x$, *o eixo dos yy e as rectas* $y = 0$ *e* $y = 2$;
7. *a parábola* $y = -x^2 + 4x - 3$ *e as suas rectas tangentes nos pontos* $(0, -3)$ *e* $(3, 0)$.
8. *a elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercício 3.61. *Calcule a área limitada:*

1. *pelo cardióide de equações paramétricas*

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \end{cases}, \qquad a > 0;$$

2. *pelo cardióide a partir da sua equação em coordenadas polares* $\rho = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$;
3. *pela lemniscata de equação* $\rho^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$;
4. *pela curva de equação* $\rho^2 = -2\operatorname{sen}(2\theta)$;
5. *pelas curvas de equações* $\rho^2 = 4\operatorname{sen}\theta$ *e* $\rho^2 = 3\operatorname{sen}\theta$.

Exercício 3.62. *Estabeleça os integrais que nos permitem calcular a área da figura:*

1. *interior ao cardióide* $\rho = 4(1 - \cos\theta)$ *e exterior à circunferência* $\rho = 6$;
2. *interior às circunferências* $\rho = 3\sqrt{2}\cos\theta$ *e* $\rho = 3\operatorname{sen}\theta$;
3. *interior a cada uma das pétalas da rosa de quatro pétalas de equação* $\rho = 6\operatorname{sen}(2\theta)$.

Exercício 3.63. *Diga qual o erro do seguinte raciocínio: "A área da lemniscata* $\rho^2 = a^2 \cdot \cos(2\theta)$ *é dada por*

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\cos(2\theta)\, d\theta = \left[\frac{1}{4}a^2\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi} = 0."$$

Exercício 3.64. *Calcule o comprimento das curvas:*

1. $y = \text{arc sen}(e^{-x})$ *desde o ponto de abcissa* $\frac{1}{2}$ *até ao ponto de abcissa* 1;
2. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ *desde* $(1,1)$ *até* $(2, 2\sqrt{2})$.

Exercício 3.65. *Determine o comprimento das seguintes curvas:*

1. $y = x, x \in [a,b]$; 2. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, x \in [0,b]$; 3. $y = x^2, x \in [0,1]$.

Exercício 3.66. *Determine o comprimento da curva de equação* $y = \sqrt{1-x^2}$, *entre os pontos de abcissa* $x = 0$ *e* $x = a$ *(com* $a \in [0,1]$*). Interprete geometricamente o resultado obtido.*

Exercício 3.67. *Calcule o perímetro da circunferência cujas equações paramétricas são*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Exercício 3.68. *Calcule o comprimento:*

1. *da espiral logarítmica* $\rho = e^{\theta}$ *desde* $\theta = 0$ *até* $\theta = \pi$;
2. *do cardióide* $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a < 0$;
3. *da espiral logarítmica* $\rho = 2e^{2\theta}$, $\theta \geq 0$, *que se encontra dentro do círculo* $\rho \leq a$ *com* $a \geq 2$;
4. *do segmento de recta* $\rho = 3\sec(\theta - \dfrac{\pi}{3})$ *para* $\theta \in [-\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, -\pi + \frac{2\pi}{3}]$.

Exercício 3.69. *Calcule a medida do volume do sólido de revolução gerado por:*

1. *o semi-círculo* $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, *em torno do eixo dos xx;*
2. *a região* $y \leq x^2 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge y \geq 0$, *em torno do eixo dos xx;*
3. *a região limitada pela curva* $y = x^3$, *as rectas* $y = 1$ *e* $y = 0$ *e o eixo dos yy, em torno do eixo dos yy;*
4. *a região limitada pela curva* $y = x^3$, *a recta* $x = 1$ *e o eixo dos xx, em torno do eixo dos yy;*
5. *a rotação em torno do eixo dos yy do círculo limitado pela circunferência* $(x-a)^2 + y^2 = r^2$, *com* $a > r$ *(o sólido obtido chama-se* toro*);*
6. *a rotação em torno do eixo dos xx da região dada pela condição* $(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x - y - 1 \geq 0 \wedge y \geq 0$.

Exercício 3.70. *Um fluido escorre para dentro de um tanque à velocidade de* $2t+3$ *litros por minuto, onde* t *é o tempo medido em horas depois do meio-dia. Se o tanque estiver vazio ao meio-dia e tiver a capacidade de* 1000 *litros, a que horas estará cheio?*

Exercício 3.71. *A densidade de massa de um fio é* $f(x) = x^2e^{-x}$ *quilogramas por centímetro. O fio tem* 2 *metros de comprimento. Calcule a sua massa sabendo que ela é dada por*

$$M = \int_0^{200} f(x)\, dx.$$

Exercício 3.72. *Quando um gás se expande num cilindro de raio* r*, a pressão num dado momento é função do volume:* $P = P(V)$*. A força exercida pelo gás no pistão é dada pelo produto da pressão pela área:* $F = \pi r^2 P$*.*

1. *Mostre que o trabalho produzido pelo gás quando o volume expande de* V_1 *para* V_2 *é dado por* $W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$*.*

2. *Numa máquina a vapor a pressão* P *e o volume* V *de vapor satisfazem a equação* $PV^{1,4} = k$*, onde* k *é uma constante. (Isto é verdade para uma expansão adiabática, que é uma expansão onde não ocorre transferência de calor entre o cilindro e o seu exterior). Use a alínea anterior para calcular o trabalho realizado pelo motor num ciclo quando o vapor começa a uma pressão de 72 Kgf/cm*^{2} *e um volume de 100 cm*^{3} *e expande até um volume de 800 cm*^{3}*.*

Exercício 3.73. *Uma partícula de massa* m *movendo-se num fluido está sujeita a uma resistência de viscosidade* R*, que é função da velocidade* v*. A relação entre a resistência* R*, a velocidade* v *e o tempo* t *é dada pela equação*

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\, du.$$

Suponhamos que $R(v) = -v\sqrt{v}$ *para um fluido particular, onde* R *é dado em newtons e* v *em metros/segundo. Se* $m = 10$ *kg e* $v(0) = 10$ *m/seg calcule o tempo necessário para a partícula reduzir a sua velocidade para* $v = 5$ *m/seg.*

Exercício 3.74. *Uma substância radioactiva decai exponencialmente. Assim, a massa no tempo* t *é*

$$m(t) = m(0)e^{kt},$$

onde $m(0)$ *é a massa inicial e* k *uma constante negativa. A "vida média" de um átomo na substância é dada por*

$$M = -k\int_0^{\infty} te^{kt}\, dt.$$

Para o isótopo radioactivo de carbono ^{14}C*, usado na datação, o valor de* k *é* $-0{,}000124$*. Calcule a vida média de um átomo de* ^{14}C*.*

Exercício 3.75. *No método da diluição do contraste, usado para medir a capacidade cardíaca, introduz-se uma substância (contraste) na corrente sanguínea e uma sonda na aorta para medir a concentração de contraste que sai do coração em intervalos de tempo regulares, durante o intervalo $[0, T]$, até que o contraste esteja terminado. A capacidade cardíaca do coração (volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo), será dada por*

$$\frac{A}{\int_0^T c(t)\,dt},$$

onde A é a quantidade de contraste (mg) introduzido e $c(t)$ a concentração de contraste (mg/L) no instante t. Calcule a capacidade cardíaca quando $A = 8$ mg e $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$ mg/L, com $0 \leq t \leq 12$.

Exercício 3.76. *A "velocidade média" das moléculas de um gás ideal é dada por*

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv,$$

onde M é o peso molecular do gás, R a constante do gás, T a temperatura do gás e v a velocidade molecular. Mostre que

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Exercício 3.77. *A quantidade de massa que é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por*

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\,dt$$

onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando a fórmula do trapézio, $Q = 5$ m^3/min e os dados da tabela

t (min)	0	10	20	30	40
c (mg/m^3)	10,00	35,00	54,73	52,16	37,07

aproxime o valor da massa libertada pelo reactor nos primeiros 40 minutos.

Exercício 3.78. *A função*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é usada com muita frequência em disciplinas tão diversas como a teoria das probabilidades, distribuição de calor, difusão de matérias, etc. Usando uma das regras de integração com $n = 10$, calcule uma aproximação para o valor do referido integral.

Exercício 3.79. *Seja* $I = \int_0^\pi xe^{2x}dx$.

1. *Qual o menor número de pontos que deve considerar na fórmula do trapézio por forma a aproximar o valor do integral com uma casa decimal correcta.*
2. *Calcule o valor aproximado de* I *de acordo com a alínea anterior.*

Exercício 3.80. *Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função*

$$f(x) = x^3 - x,$$

entre os pontos (-1,0) e (2,6), usando a fórmula do trapézio composta, com 4 subintervalos.

Exercício 3.81. *A intensidade de luz com comprimento de onda* λ *viajando através de uma grelha de difração com* n *aberturas a um ângulo* θ *é dada por*

$$I(\theta) = (n/k)^2 \operatorname{sen}^2 k,$$

onde

$$k = (\pi n d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$$

e d *é a distância entre cada abertura. Um laser de hélio-néon com comprimento de onda* $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ *m emite uma banda estreita de luz, dada por* $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, *através de uma grelha com 10.000 aberturas separadas por* 10^{-4} *m. Obtenha um valor aproximado para a intensidade de luz total que sai da grelha*

$$\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta.$$

Exercício 3.82. *A fim de planificar uma sala para raios infravermelhos, estamos interessados em calcular a energia emitida por um corpo negro (isto é, um objecto capaz de irradiar em todo o espectro à temperatura ambiente) no espectro (infravermelho) compreendido entre os comprimentos de onda 3* μ*m e 14* μ*m. A solução deste problema obtém-se calculando o integral*

$$E(T) = 2{,}39 \times 10^{-11} \int_{3\times10^{-4}}^{14\times10^{-4}} \frac{dx}{x^5(e^{1{,}432/(Tx)-1})},$$

que é a equação de Planck para a energia $E(T)$, *onde* x *é o comprimento de onda (em cm) e* T *a temperatura (em Kelvin) do corpo negro. Recorra à fórmula do trapézio para determinar a função* $E(T)$, *com* $T = 213$ *K.*

Capítulo 4

Equações diferenciais

4.1 Modelos

4.1.1 Crescimento de uma população

Consideremos uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho. Então, se P representar o número de indivíduos da população e k a constante de proporcionalidade, a taxa de crescimento é dada por

$$P'(t) = kP(t)$$

ou, noutra notação e omitindo a dependência de t na função P,

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{4.1}$$

Notemos que, uma vez que se trata de uma população, $P(t) > 0$, para todo o instante t.

Para saber qual o comportamento da população à medida que o tempo aumenta, consideremos dois casos.

Caso $k > 0$:

Neste caso, $P'(t) > 0$, para todo o t, o que significa que a população está sempre a aumentar, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento também aumenta.

Caso $k < 0$:

Neste caso, $P'(t) < 0$, para todo o t, o que significa que a população está sempre a decrescer, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento diminui.

Uma questão que se coloca é a de saber como determinar a solução da equação (4.1). Se considerarmos

$$P(t) = Ce^{kt}, \tag{4.2}$$

temos que

$$P'(t) = Cke^{kt} = kP(t).$$

Logo (4.2) é uma solução da equação. A constante C pode ser determinada pela condição inicial $P(0) = P_0$. Assim, considerando $t = 0$ em (4.2), sai que $C = P_0$.

O modelo de crescimento exponencial é também chamado modelo de Malthus. Apresentado em 1798 por Thomas Robert Malthus (1766–1834), (4.1) foi o primeiro modelo do crescimento de uma população humana, onde a constante de proporcionalidade é dada pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

O modelo de Malthus descreve o crescimento de uma população em condições ideais mas não nos podemos esquecer que, por exemplo, o ambiente tem recursos limitados o que faz com que a população não possa crescer indefinidamente. Muitas populações começam por crescer exponencialmente mas o nível da população começa a estabilizar quando ela se aproxima da sua capacidade de suporte S (ou a diminuir em relação a S, se ela exceder o valor de S).

Vamos considerar uma população P cuja taxa de variação verifica as seguintes propriedades: é proporcional a P, para valores de P pequenos e é negativa, para valores de P superiores à capacidade de suporte S. Consideremos, por exemplo, um modelo cuja taxa de variação seja proporcional tanto a P como a $1 - \frac{P}{S}$, isto é,

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{S}\right). \tag{4.3}$$

Para este modelo temos que, se $P \ll S$ então $\frac{P}{S} \approx 0$ e

$$\frac{dP}{dt} \approx kP.$$

Por outro lado, se $P > S$ então $1 - \frac{P}{S} < 0$ e, como tal,

$$\frac{dP}{dt} < 0.$$

A equação (4.3) é conhecida por equação logística. Esta equação foi proposta por Pierre François Verhulst (1804–1849), em 1840, como um modelo para o crescimento da população mundial.

Notemos que as constantes $P = 0$ e $P = S$ são soluções da equação logística (4.3). Estas soluções são chamadas soluções de equilíbrio. Mais ainda, se $P(0) = P_0 \in]0, S[$ então $\frac{dP}{dt} > 0$ e a população aumenta. Por outro lado, se $P(0) = P_0 > S$ então $\frac{dP}{dt} < 0$ e a população diminui.

4.1.2 Movimento de uma mola

Segundo a Lei de Hooke, estabelecida por Robert Hooke (1635–1703), a força elástica de uma mola de comprimento $x(t)$, dependente do tempo, suspensa na vertical e sujeita a uma carga de massa m, é dada por

$$F = -kx,$$

com $k > 0$ a chamada constante da mola. Por outro lado, pela Segunda Lei de Isaac Newton (1643–1727),

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

e, como tal, o comprimento da mola pode ser obtido pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Pode demonstrar-se que toda a solução desta equação se pode escrever como combinação linear de senos e cossenos.

4.2 Caso geral

Uma equação diferencial é uma equação que contém uma função como incógnita e uma ou mais das suas derivadas. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. A equação

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{4.4}$$

em que $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com I um intervalo real, é uma equação diferencial de primeira ordem.

Uma função f é solução da equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e as suas derivadas são substituídas na equação. Na equação $y' = xy$, a função $y = f(x)$ é solução da equação se $f'(x) = xf(x)$. Na equação (4.4), a x chamamos variável imdependente e a y variável dependente (de x). Caso a variável independente seja o tempo, é usual notá-la pela letra t. Nesse caso, a equação diferencial também se pode chamar sistema dinâmico.

Resolver uma equação diferencial significa encontrar todas as suas soluções (pode não ser fácil...). Por exemplo, se $y' = t^3$ temos que a solução é dada, imediatamente, pela primitiva $y = t^4/4+c$, $c \in \mathbb{R}$. No entanto, se $y' = ty$, a solução já pode ser mais difícil de obter. Nesta secção vamos considerar algumas técnicas (mais em [1, 14]) para determinar as soluções de uma equação diferencial. Notemos que, tal como na primitivação, uma equação diferencial tem sempre mais do que uma solução.

A solução equação (4.4), se existir, não é única pois, ao integrarmos, introduzimos sempre uma constante de integração. A forma de contornar este problema consiste em especificar $y(x)$ num ponto qualquer do intervalo I, usualmente o ponto inicial do intervalo x_0. Ficamos assim com o problema de condição inicial (PCI)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(x) & = & f(x, y(x)), & t \in]x_0, X] \\ y(x_0) & = & y_0 & \end{array} \right. , \tag{4.5}$$

também chamado problema de Cauchy, em homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Exercício 4.1. *Mostre que $y(t) = t^2(e^t - e)$ é solução do problema de condição inicial*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y' & = & \frac{2}{t}y + t^2e^t, & t \in]1, 2] \\ y(1) & = & 0 & \end{array} \right. .$$

Resolução: Basta ver que, como $t \neq 0$,

$$y'(t) = 2t(e^t - e) + t^2e^t = \frac{2}{t}y + t^2e^t$$

e que $y(1) = 1(e^1 - e) = 0$, o que prova o pretendido. □

4.3 Campo de direcções

Consideremos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (4.4). Nas próximas secções vamos considerar equações diferenciais que podem ser resolvidas explicitamente. No entanto, na maioria dos casos, essas soluções são impossíveis de calcular. Uma forma de poder ter uma ideia do comportamento das soluções de uma equação diferencial sem as calcular explicitamente recorre a um método gráfico que consiste em analisar o chamado campo de direcções.

A equação diferencial (4.4) diz-nos que o declive da tangente à solução da equação que passa pelo ponto (x, y) é dada por $f(x, y)$. O **campo de direcções** da equação diferencial é um gráfico do plano (x, y), onde em alguns pontos aparece um vector com declive igual ao valor de $f(x, y)$ nesse ponto. Assim, as soluções da equação diferencial deverão ser as curvas tangentes a esses vectores. Pela análise do campo de direcções podemos ficar com uma ideia da forma das soluções.

Vejamos alguns exemplos. Na Figura 4.1 (esquerda) temos representado o campo de direcções da equação $y'(x) = x + y$ e a solução da equação que passa pelo ponto $(0, 1)$. Como pode ser visto, o campo de direcções indica claramente a forma das soluções da equação diferencial. Outro exemplo é o dado na Figura 4.1 (direita) onde se representa o campo de direcções da equação $y'(x) = x^2 + y^2$ e a solução da equação que passa pelo ponto $(0, 1)$. Mais uma vez, é claro que o campo de direcções indica a forma das soluções da equação diferencial.

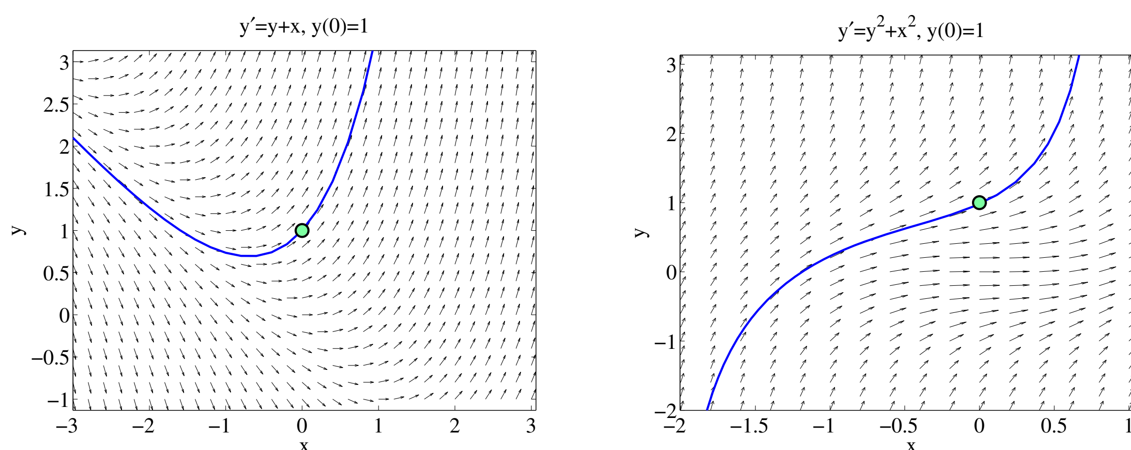


Figura 4.1: Campo de direcções e curva solução.

4.4 Equações separáveis

Uma equação separável (ou de variáveis separáveis) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$y'(x) = g(x)f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

De forma equivalente, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever a equação na forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad \text{com } h(y) = \frac{1}{f(y)}.$$

Logo

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow \int h(y)\frac{dy}{dx}\, dx = \int g(x)\, dx \Leftrightarrow \int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx.$$

Obtemos assim y (implicitamente) como função de x.

Poderíamos ter chegado ao mesmo resultado se tivéssemos usado formas diferenciais. Nesse caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Leftrightarrow h(y)\, dy = g(x)\, dx \Leftrightarrow \int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx.$$

Também poderíamos ter usado a técnica da primitivação por substituição. Assim

$$\int h(y)\, dy = \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\, dx = \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\, dx = \int g(x)\, dx.$$

Exercício 4.2. *Determine a solução do problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{6x^2}{2y + \cos y} \\ y(1) &= \pi \end{cases}.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y} \Leftrightarrow (2y + \cos y)dy = 6x^2 dx \Leftrightarrow \int 2y + \cos y\, dy = \int 6x^2\, dx.$$

Integrando nos dois membros obtemos $y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Usando a condição inicial podemos determinar a constante c na forma $\pi^2 + \operatorname{sen} \pi = 2 + c$, o que implica $c = \pi^2 - 2$.. Concluímos que a solução pretendida é dada implicitamente por $y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + \pi^2 - 2$. $\square$

Problema das misturas. Um exemplo de um problema que pode ser resolvido pela técnica da separação de variáveis é o chamado problema das misturas. Consideremos um tanque com capacidade fixa, preenchido com uma solução completamente misturada de uma substância. Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai do tanque a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denotar a quantidade de substância no tanque no tempo t então

$$y'(t) = \text{ taxa de entrada } - \text{ taxa de saída}.$$

A título de exemplo, considere-se um tanque com 20 Kg de sal dissolvido em 5000 L de água. Suponhamos que fazemos entrar no tanque água salgada com 0,03 Kg de sal por litro a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Que quantidade de sal permanece no tanque ao fim de meia hora?

Se representarmos por $y(t)$ a quantidade de sal no instante t, com t o tempo em minutos, pelos dados do problema temos que $y(0) = 20$ Kg e queremos determinar $y(30)$. Temos que a variação de sal no tanque é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \text{ taxa de entrada (de sal) } - \text{ taxa de saída (de sal).}$$

Mas,

$$\text{taxa de entrada (de sal) } = (0{,}03 \text{ Kg/L}) \times (25 \text{ L/min}) = 0{,}75 \text{ Kg/min}$$

e

$$\text{taxa de saída (de sal) } = \left(\frac{y(t)}{5000} \text{ Kg/L}\right) \times (25 \text{ L/min}) = \frac{y(t)}{200} \text{ Kg/min.}$$

Logo

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y}{200} = \frac{150 - y}{200}.$$

Para resolver esta equação temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = \frac{150 - y}{200} \quad & \Rightarrow \quad \int \frac{1}{150 - y}\, dy = \int \frac{1}{200}\, dt \\
& \Rightarrow \quad -\ln|150 - y| = \frac{1}{200}t + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad |150 - y| = e^{-c}e^{-(1/200)t}, \quad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad 150 - y = Ae^{-(1/200)t}, \quad A = \pm e^{-c},\ c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad y(t) = 150 - Ae^{-(1/200)t}, \quad A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para obter A notemos que, como $y(0) = 20$ então $A = 130$. Assim, temos que

$$y(t) = 150 - 130e^{-(1/200)t} \Rightarrow y(30) = 150 - 130e^{-(3/20)} \approx 38{,}1080 \text{ Kg.}$$

4.5 Crescimento e decaimento exponencial

Vimos que um modelo para o crescimento exponencial pode ser dado por

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ (constante)}, \tag{4.6}$$

onde $y(t)$ é o valor de uma quantidade y no tempo t. Neste modelo supõe-se que a taxa de variação de y em relação a t é proporcional a y. A esta lei chama-se lei de crescimento natural ($k > 0$) ou lei de decaimento natural ($k < 0$).

Como a equação diferencial (4.6) é separável temos

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\, dt \Rightarrow \ln|y| = kt + c \Rightarrow |y| = e^{kt+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Então

$$y(t) = Ae^{kt}, \qquad A = \pm e^{c}.$$

Notemos ainda que, se conhecermos uma condição inicial $y(0) = y_0$, o valor de A pode ser dado por $A = y_0$. Provámos então que a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) & = & ky \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

é dada por $y(t) = y_0 e^{kt}$. Vejamos, agora, qual o significado da constante de proporcionalidade k. Temos que

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow k = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$

Assim, k representa a **taxa de crescimento (decaimento) relativa**, isto é, a taxa de crescimento (decaimento) dividida pelo tamanho da população. Podemos então dizer que, no modelo exponencial a taxa de crescimento (decaimento) relativa é constante. Por exemplo, se $\frac{dy}{dt} = 0{,}02y$ dizemos que a taxa de crescimento relativa é de 2%.

Um exemplo de grande importância prática é o do decaimento radioactivo. Como se sabe, as substâncias radioactivas decaem pela emissão expontânea de radiação. Sabe-se experimentalmente que, se $m(t)$ é a massa da substância que fica da massa inicial m_0 ao fim de um tempo t, então a taxa de decaimento relativa $-\dfrac{1}{m}\dfrac{dm}{dt}$ é constante. Temos então que

$$\frac{dm}{dt} = km, \qquad k < 0,$$

o que implica

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

A taxa de decaimento é calculada em função da **meia-vida** da substância, isto é, do tempo necessário para a massa inicial decair para metade do seu valor.

Exercício 4.3. *A meia-vida do rádio-226 é* $^{226}_{88}Ra$ *é 1590 anos. Sabendo que uma amostra de rádio-226 tem massa 100 mg, encontre a massa de* $^{226}_{88}Ra$ *que permanece ao fim de* t *anos.*

Resolução: Temos que resolver o problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} & = & km \\ m(0) & = & 100 \end{cases}.$$

Como vimos, $m(t) = 100e^{kt}$. Falta-nos apenas determinar o valor da taxa de decaimento relativa k. Pelos dados do problema, $m(1590) = 50$ mg e, como tal,

$$100e^{1590k} = 50 \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Então $m(t) = 100e^{-(\ln 2/1590)t} = 100 \times 2^{-t/1590}$ mg. $\square$

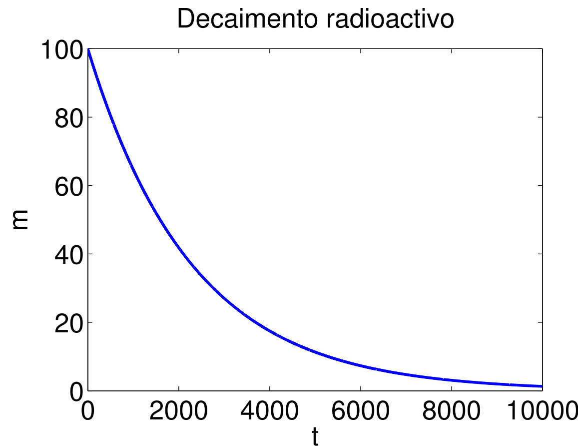


Figura 4.2: Solução do Exercício 4.3.

4.6 Equação logística

Como vimos, o modelo de crescimento exponencial de uma população só é válido nos instantes iniciais. Assim, se $y(t)$ for o tamanho da população no instante t temos que

$$\frac{dy}{dt} \approx ky, \qquad y \text{ (pequeno)}.$$

Isto que dizer que a taxa de crescimento relativa da população é praticamente constante quando a população é pequena.

No modelo que agora pretendemos estudar, a taxa de crescimento relativa diminui quando a população aumenta e torna-se negativa quando o número de indivíduos da população ultrapassa a capacidade de suporte S. A expressão mais simples para uma taxa de crescimento relativa nessas circunstâncias é

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{S}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right).$$

Obtemos assim a chamada equação logística

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) \tag{4.7}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y\left(S - y\right), \qquad k_1 = \frac{k}{S}.$$

Notemos que este modelo verifica o pretendido. De facto, se $y \ll S$ então $\frac{y}{S} \approx 0$ e, como tal, $\frac{dy}{dt} \approx ky$. Por outro lado, se $y \to S$ então $\frac{y}{S} \to 0$ e assim $\frac{dy}{dt} \to 0$. Além disso, se $y \in]0, S[$ então $ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) > 0$ e assim $\frac{dy}{dt} > 0$, ou seja, a população aumenta. Se $y > S$ então $ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) < 0$ e assim $\frac{dy}{dt} < 0$, ou seja, a população diminui.

Vamos agora ver como obter a solução analítica da equação logística (4.7). Como é uma equação de variáveis separáveis temos, sucessivamente,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = ky\left(1-\frac{y}{S}\right) \quad & \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{S}\right)} = \int k\,dt \\
& \Rightarrow \quad \int \frac{S}{y\,(S-y)}\,dy = \int k\,dt \\
& \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} + \frac{1}{S-y}\,dy = kt \\
& \Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|S-y| = kt + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad \ln|S-y| - \ln|y| = -kt - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{S-y}{y}\right| = -kt - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad \left|\frac{S-y}{y}\right| = e^{-kt-c}, \qquad c \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow \quad \frac{S-y}{y} = Ae^{-kt}, \qquad A = \pm e^{-c},\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Então

$$
\frac{S}{y} - 1 = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{S}{y} = Ae^{-kt} + 1 \Rightarrow y = \frac{S}{Ae^{-kt}+1}.
$$

O valor de A pode ser obtido a partir da condição inicial. Se considerarmos $y(0) = y_0$ temos que, de (4.8),

$$
A = \frac{S - y_0}{y_0}.
$$

Assim, a solução do problema de condição inicial logístico

$$
\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = & ky\left(1-\dfrac{y}{S}\right) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}
$$

é

$$
y(t) = \frac{S}{Ae^{-kt}+1}, \qquad A = \frac{S-y_0}{y_0}. \tag{4.9}
$$

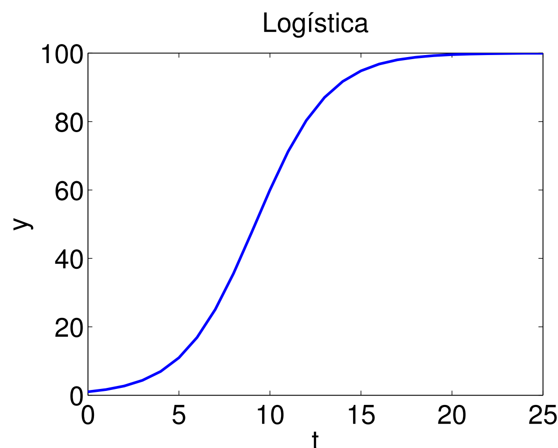


Figura 4.3: Equação logística (4.9) com $S = 100$, $k = 0{,}5$ e $y_0 = 1$.

4.7 Equações lineares

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

onde P e Q são funções contínuas num dado intervalo.

Um exemplo é dado pela equação

$$xy' + y = 2x \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 2.$$

Esta equação não é separável. Notemos, no entanto, que $xy' + y = (xy)'$. Assim,

$$(xy)' = 2x \Leftrightarrow \int (xy)'\,dx = \int 2x\,dx \Leftrightarrow xy = x^2 + c \Leftrightarrow y(x) = x + \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se tivessemos partido de

$$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

teríamos que multiplicar ambos os membros por x por forma a obter $xy' + y = 2x$ e depois resolver o problema. Nesse caso, diríamos que $I(x) = x$ era um factor integrante da equação.

Consideremos, de novo, a equação

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Vamos calcular o factor integrante da equação, isto é, a função $I(x)$ tal que

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'. \tag{4.10}$$

Se conseguirmos encontrar $I(x)$ nestas condições então

$$\begin{aligned}(I(x)y)' = I(x)Q(x) \quad &\Rightarrow \quad I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)Q(x)\,dx + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vamos agora obter a expressão para $I(x)$. De (4.10) temos

$$\begin{aligned}I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad &\Rightarrow \quad I(x)y' + I(x)P(x)y = I'(x)y + I(x)y'\\ &\Rightarrow \quad I(x)P(x) = I'(x)\\ &\Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = I(x)P(x)\\ &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{I(x)}\,dI = \int P(x)\,dx\\ &\Rightarrow \quad \ln|I(x)| = \int P(x)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \quad I(x) = Ae^{\int P(x)\,dx}, \quad A = \pm e^c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Assim $I(x)$ é um factor integrante qualquer que seja o A. Vamos escolher, por exemplo, $A = 1$. Então,

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Podemos estabelecer o seguinte algoritmo para resolver o problema de condição inicial linear de primeira ordem

$$\begin{cases} y' + P(x)y & = & Q(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}.$$

1. Obter o factor integrante
$$I(x) = e^{\int P(x)\, dx}.$$

2. Multiplicar ambos os membros por $I(x)$
$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' = I(x)Q(x)$$
e resolver a equação
$$(I(x)y)' = I(x)Q(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)Q(x)\, dx + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Determinar c usando a condição inicial.

4.8 Método de Euler*

A solução do PCI (4.5), caso exista, pode não ser possível de obter de forma explícita. Neste caso, é usual recorrer a métodos numéricos que permitam obter uma aproximação à sua solução. O método numérico mais simples é o chamado método de Euler, em homenagem a matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), e é baseado no campo de direcções da equação diferencial.

4.8.1 Definição e exemplos

Para compreender o funcionamento do método, considere-se o PCI

$$\begin{cases} y' & = & y + t, \quad t > 0 \\ y(0) & = & 1 \end{cases}. \tag{4.11}$$

Como $y'(0) = y(0) + 0 = 1$, a curva solução deste problema tem uma tangente com declive igual a 1 no ponto $(0, 1)$. Assim, uma primeira aproximação para a solução do problema consiste em considerar a aproximação linear a y no ponto $(0, 1)$, isto é, a recta $L_0(t) = 1+t$.

Como se sabe, a aproximação linear só deve ser considerada localmente. Por esse facto, a aproximação linear só irá ser considerada em intervalos pequenos. Partindo de $t_0 = 0$, vamos considerar $y \approx L_0(t)$ no intervalo $[t_0, t_1]$, com $t_1 = t_0 + \Delta t$, sendo Δt uma quantidade pequena chamada medida do passo. Considerando $\Delta t = 0{,}5$, por exemplo, temos que $y(t_1) = y(0{,}5) \approx y_1 = L_0(0{,}5) = 1{,}5$.

A partir desse ponto, o método calcula uma nova aproximação linear. Uma fez que é conhecido o declive da solução que passa no ponto $(t_1, y_1) = (0{,}5, 1{,}5)$, a aproximação à solução no ponto $t_2 = t_1 + \Delta t = 1$ é dada pela aproximação linear da solução da solução que passa no ponto $(0, 1)$, isto é, a recta $L_1(t) = 1{,}5 + f(0{,}5, 1{,}5)(t - 0{,}5) = 1{,}5 + 2(t - 0{,}5)$.

Obtemos então $y(t_2) = y(1) \approx y_2 = L_1(1) = 1{,}5 + 2(1 - 0{,}5) = 2{,}5$. O processo acabado de descrever pode ser visto geometricamente na Figura 4.4. Prosseguindo de forma idêntica, obtêm-se as aproximações

$$y(t_{i+1}) \approx y_{i+1} = L_i(t_{i+1}) = y_i + f(t_i, y_i)(t_{i+1} - t_i) = y_i + \Delta t f(t_i, y_i), \qquad i = 2, 3, ...$$

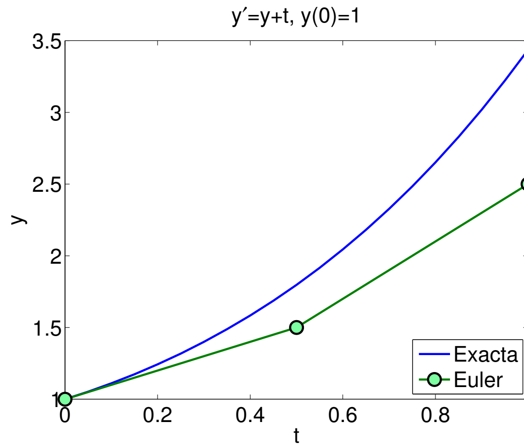


Figura 4.4: Solução exacta e solução aproximada obtida pelo método de Euler.

Vamos agora apresentar o método de Euler de uma forma mais geral. Consideremos, de novo, o PCI (4.5). O método de Euler permite obter aproximações $y_0, y_1, \ldots, y_n$ para a solução exacta (caso exista) $y_0 = y(x_0), y_1 \approx y(x_1), \ldots, y_n \approx y(x_n)$ nos pontos distintos da malha

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X.$$

Às distâncias $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, dá-se o nome de passos de discretização (ou medidas do passo) da malha. Se os passos forem todos iguais a malha diz-se uniforme ou de passo constante. Caso contrário diz-se de passo variável. Neste curso vamos apenas considerar malhas uniformes, isto é, tais que $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$, onde $h = \frac{X - x_0}{n}$.

O método de Euler permite determinar valores $y_i \approx y(x_i)$ por meio de uma relação de recorrência deduzida do PCI (4.5) de modo a que o valor de y_{i+1} vem expresso em função do valor de y_i. Essa relação de recorrência é dada por

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, ..., n - 1. \tag{4.12}$$

Como, no método de Euler, y_{i+1} vem apenas expresso em função do valor de y_i e não dos anteriores,. é chamado um método de passo. O método de Euler é, muitas vezes, chamado método de Euler progressivo ou método de Euler explícito pois a determinação o valor de y_{i+1} pode ser feita directamente a partir de y_i sem haver necessidade de resolver qualquer equação algébrica. A $\{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ chama-se solução numérica.

O seguinte algoritmo permite determinar a solução do PCI (4.5) em $x = X$, usando o método de Euler.

Algoritmo 4.1 Método de Euler

Dados: f, $x0$, X, $y0$ e n

$h := (X - x0)/n$

$x := x0$

$y := y0$

Para i de 1 até n fazer

  $y := y + hf(x, y)$

  $x := x + h$

Resultado: $y(X) \approx y$

Neste capítulo não iremos abordar a questão da convergência do método de Euler, isto é, a questão de saber se, quando consideramos o problema de condição inicial (4.5), as soluções aproximadas obtidas pelo método de Euler convergem para solução exacta, caso exista, do problema.

Exercício 4.4. *Considere o problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y'(t) &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Determine, usando o método de Euler, o valor aproximado de $y(1)$*, fazendo* $h = 1$*,* $h = 0.5$ *e* $h = 0.25$*. Compare os resultados obtidos sabendo que* $y(t) = e^{-2t}$*.*

Resolução: A solução exacta deste problema é $y(1) = 0{,}135335283$. Consideremos agora as soluções numéricas para os três casos propostos. Seja $f(y) = -2y$.

- $h = 1$

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &= 1 \\ y(1) \approx y_1 &= y_0 + hf(y_0) = 1 + 1 \times (-2) = -1. \end{aligned}$$

Logo $|y(1) - y_1| = 1{,}135335283$.

- $h = 0.5$

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &= 1 \\ y(0{,}5) \approx y_1 &= y_0 + hf(y_0) = 1 + 0{,}5 \times (-2) = 0 \\ y(1) \approx y_2 &= y_1 + hf(y_1) = 0 + 0{,}5 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo $|y(1) - y_2| = 0{,}135335283$.

- $h = 0{,}25$

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &= 1 \\ y(0{,}25) \approx y_1 &= y_0 + hf(y_0) = 1 + 0{,}25 \times (-2) = 0{,}5 \\ y(0{,}5) \approx y_2 &= y_1 + hf(y_1) = 0{,}5 + 0{,}25 \times (-1) = 0{,}25 \\ y(0{,}75) \approx y_3 &= y_2 + hf(y_2) = 0{,}25 + 0{,}25 \times (-0{,}5) = 0{,}125 \\ y(1) \approx y_4 &= y_3 + hf(y_3) = 0{,}125 + 0{,}25 \times (-0{,}25) = 0{,}0625. \end{aligned}$$

Logo $|y(1) - y_4| = 0{,}072835283$.

Nota-se que, quanto menor for a medida do passo h mais pequeno é o erro cometido pelo método de Euler. □

4.8.2 Convergência do método de Euler

Apesar da condição inicial imposta a uma condição diferencial especificar a constante de integração, ainda não temos a garantia da existência e unicidade da solução do PCI (4.5). Antes de apresentarmos o teorema que estabelece as condições suficientes para que o problema tenha solução única consideremos a definição seguinte devida a Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903).

Definição 4.1 (Função lipschitziana)**.** *Uma função $f(x, y)$ verifica a* condição de Lipschitz *(ou é* lipschitziana*), na variável y, num conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ se existir uma constante $L > 0$ tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

sempre que $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. A L chama-se constante de Lipschitz*.*

Exercício 4.5. *Prove que a função $f(t, y) = t|y|$ é lipschitziana, na variável y, no conjunto*

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2;\ -3 \leq y \leq 4\}.$$

Resolução: Temos que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t|y_1| - t|y_2|| \leq 2||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|.$$

Logo, a constante de Lipschitz é $L = 2$. □

O teorema seguinte, atribuído a Charles Émile Picard (1856–1941), estabelece condições suficientes para que um problema com condição inicial tenha solução única.

Teorema 4.1 (Picard)**.** *Seja $f(x, y)$ uma função contínua (nas variáveis x e y) e lipschitziana (na variável y) em $D = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq X, y \in \mathbb{R}\}$. Então o PCI (4.5) tem solução única $y(x) \in C^1([x_0, X])$.*

A demonstração deste teorema estabelece um processo iterativo de aproximação da solução do PCI (4.5) conhecido por método de Picard. Se f for contínua em relação a t, determinar a solução do PCI (4.5) é equivalente a determinar y, continuamente diferenciável, que verifica

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{4.13}$$

O que se prova na demonstração do Teorema de Picard é que a sucessão de funções $\{u_j(x)\}$, definida recursivamente por

$$u_0(x) = y_0, \qquad u_{j+1}(x) = y_0 + \int_a^x f(\xi, u_j(\xi))d\xi, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

converge para a única solução de (4.13).

Como corolário do Teorema de Picard temos o seguinte resultado que apresentamos, igualmente, sem demonstração.

Corolário 4.2. *Suponhamos que* $f(x,y)$ *está definida num conjunto convexo* $D \subset \mathbb{R}^2$*, isto é, num conjunto* $D \subseteq R^2$ *tal que, para qualquer* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$*, se verifica*

$$((1-\theta)x_1 + \theta x_2, (1-\theta)y_1 + \theta y_2) \in D, \qquad \theta \in [0,1].$$

Se existir uma constante $L > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq L, \qquad \forall (x,y) \in D,$$

então f *satisfaz a condição de Lipschitz, na variável* y*, com* L *a respectiva constante e, como tal, o PCI (4.5) tem solução única* $y(x) \in C^1([x_0, X])$*.*

Note-se que o conjunto $D = \{(x,y) : x_0 \leq x \leq X, y \in \mathbb{R}\}$ é, obviamente, convexo.

Exercício 4.6. *Mostre que o problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y'(t) &= \dfrac{1}{1+y^2}, \qquad t \in]t_0, T], \\ y(t_0) &= 0 \end{cases}$$

tem solução única.

Resolução: Seja $D = \{(t,y) : t_0 \leq t \leq T, y \in \mathbb{R}\}$ e

$$f(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Vamos provar que a função

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = \left|\frac{-2y}{(1+y^2)^2}\right|$$

é limitada em D. Para isso há que determinar

$$L = \max_{y \in \mathbb{R}} \left|\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right|.$$

Como a função que queremos provar limitada é par temos que

$$L = \max_{y \in \mathbb{R}_0^+} \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

Consideremos

$$g(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

Como $g'(y) = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos que

$$L = \max\left\{g(0),\ g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \lim_{y \to +\infty} g(y)\right\} = \max\{0,\ 0{,}6594,\ 0\} = 0{,}6594.$$

Está assim provado o pretendido. $\square$

O próximo teorema estabelece as condições que garantem a convergência do método de Euler, isto é, que garantem que

$$\lim_{h\to 0} \max_{1\le i\le n} |y(x_i) - y_i| = 0,$$

sendo $y(x_i)$ e y_i a solução exacta do PCI (4.5) e y_i a aproximada de (4.5) obtida no ponto $x_i = x_0 + h$ pelo método de Euler.

Teorema 4.3. *Seja $y(t)$ a única solução do PCI (4.5), verificando as condições do Teorema de Picard. Então*

$$|y(x_i) - y_i| \le \frac{C}{L} h \left(e^{L(x_i - x_0)} - 1 \right), \qquad i = 1, ..., n,$$

sendo L a constante de Lipschitz de f. Por outras palavras, dado um PCI nas condições do Teorema de Picard, podemos garantir que o método de Euler, aplicado à resolução numérica desse problema, gera uma sucessão de aproximações convergente para a solução exacta.

A demonstração do teorema anterior (que pode ser vista em [2]) sai fora do âmbito da disciplina. No entanto, iremos ilustrar a convergência do método de Euler com um exemplo.

Considere-se, de novo, o PCI 4.11. Aplicando o método de Euler com $h = 0{,}4$ e $h = 0{,}2$ obtém-se as soluções dadas na Figura 4.5. Como pode ser visto, a solução obtida com uma medida do passo menor está mais próxima da solução exacta, o que corrobora o que foi estabelecido no teorema anterior.

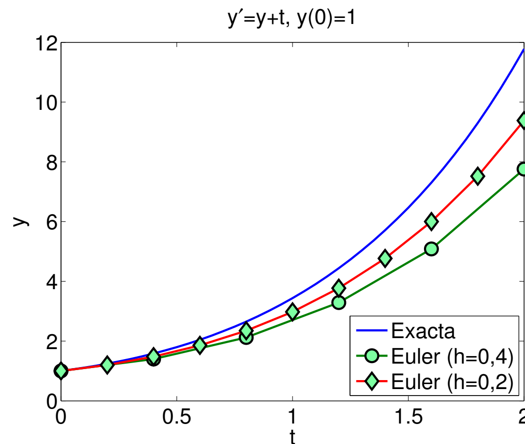


Figura 4.5: Solução exacta e soluções aproximadas obtidas pelo método de Euler.

4.8.3 Sistemas de equações diferenciais

A teoria e os métodos numéricos apresentadas nas secções precedentes podem ser facilmente generalizados para sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, isto é, adaptados ao cálculo da solução aproximada do PCI

$$\left\{\begin{array}{lcll} Y'(x) & = & F(x,Y), & t\in]x_0,X] \\ Y(x_0) & = & Y^{(0)} & \end{array}\right. , \tag{4.14}$$

onde

$$Y(x)=\begin{bmatrix} Y_1(x) \\ Y_2(x) \\ \vdots \\ Y_N(x) \end{bmatrix}, \qquad F(x,Y)=\begin{bmatrix} F_1(x,Y) \\ F_2(x,Y) \\ \vdots \\ F_N(x,Y) \end{bmatrix}.$$

Os métodos numéricos irão, neste caso, determinar aproximações $Y^{(i)}$ para $Y(x_i)$. O método de Euler, por exemplo, é dado por

$$Y^{(i+1)}=Y^{(i)}+hF(x_i,Y^{(i)}), \quad i=0,\ldots,n, \qquad Y^{(0)}=Y(x_0),$$

com $h=\frac{X-x_0}{n}$ a medida do passo.

Uma situação importante onde surgem sistemas de equações diferenciais é quando pretendemos resolver uma equação diferencial de ordem superior a um. Note-se que qualquer equação diferencial de ordem N pode ser escrita como um sistema de N equações diferenciais de primeira ordem.

A forma como essa passagem se processa é bastante simples e pode ser facilmente compreendida com a ajuda de dois exemplos.

Consideremos o problema de condição inicial $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=y'(0)=1$. Efectuando a mudança de variável $z=y'$ obtemos o problema de condição inicial de primeira ordem (supondo t a variável dependente)

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & z \\ z'(t) & = & 3z-2y \\ y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}'(t) & = & \begin{bmatrix} z \\ 3z-2y \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0) & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right. .$$

Consideremos, agora, o sistema de equações diferenciais de primeira ordem o problema

$$y'''-0{,}1(1-y^2)y'+y=0, \qquad y(0)=1,\ y'(0)=y''(0)=0.$$

Efectuando a mudança de variável $z=y'$ e $w'=y''$ obtemos o problema de condição inicial de primeira ordem

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & z \\ z'(t) & = & w \\ w'(t) & = & 0{,}1(1-y^2)z-y \\ y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 0 \\ w(0) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercício 4.7. *Considere a equação diferencial* $y'' + 4ty' + 2y^2 = 0$ *com condições iniciais* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$*. Com* $h = 0{,}1$*, utilize o método de Euler para obter aproximações para* $y(0{,}2)$ *e* $y'(0{,}2)$*.*

Resolução: Seja $z = y'$. Assim o nosso problema é equivalente a

$$\begin{cases} y'(t) &= z \\ z'(t) &= -4tz - 2y^2 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}'(t) &= \begin{bmatrix} z \\ -4tz - 2y^2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Seja

$$F(t, Y) = \begin{bmatrix} z \\ -4tz - 2y^2 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando o método de Euler temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0) = Y^{(0)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0{,}1) \approx Y^{(1)} &= Y^{(0)} + hF\left(t_0, Y^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(0{,}2) \approx Y^{(2)} &= Y^{(1)} + hF\left(t_1, Y^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}98 \\ -0{,}392 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos assim que $y(0{,}2) \approx 0{,}98$ e $y'(0{,}2) \approx -0{,}392$. □

4.9 Exercícios práticos

Exercício 4.8. *Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:*

1. $(1+t)\dfrac{dy}{dt} - y = 0$;
2. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{y}, \quad y(4) = 3$;
3. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 4$;
4. $e^t \dfrac{dy}{dt} = 2t$;
5. $(4y + yt^2)dy - (2t + ty^2)dt = 0$;
6. $\operatorname{sen} x \cos y y' + \cos x \operatorname{sen} y = 0$;
7. $-x + yy' = 0$.

Exercício 4.9. *Um projéctil é lançado da superfície terreste com uma velocidade V. Supondo que não há arrasto a equação do movimento é*

$$\nu \frac{d\nu}{dr} = -g\frac{R^2}{r^2},$$

onde ν é a velocidade à distância r do centro da Terra que tem raio R. Considerando $g = 9{,}81$ m/s^2, $R = 6{,}37 \times 10^6$ m e $V = 15000$ m/s, determine o valor da velocidade quando $r = 2R$.

Exercício 4.10. *Uma solução líquida flui de forma constante ao longo de um tubo na direcção x. Alguns dos solutos contidos na solução difundem-se através da parede do tubo reduzindo a concentração z no tubo. A concentração z é dada por*

$$\frac{dz}{dx} = -z(0{,}2 + \sqrt{z})e^{-0{,}03x}.$$

Se tomarmos $z = 1{,}5$ em $x = 2$ determine o valor de z em $x = 2{,}4$.

Exercício 4.11. *Uma cultura tem inicialmente um número N_0 de bactérias. No instante $t = 1$ hora, o número de bactérias é $3N_0/2$. Supondo que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.*

Exercício 4.12. *Um tanque tem 1000 litros de água pura. Em cada minuto, uma torneira A despeja 5 litros de água salgada com 0,05 Kg de sal por litro de água e uma torneira B despeja 10 litros de água salgada com 0,04 Kg de sal por litro de água. A solução é completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 litros por minuto. Indique a quantidade de sal que está no tanque após t minutos.*

Exercício 4.13. *Um certo medicamento é usado para tratar sintomas de angina crónica e hipertensão. Como bloqueador dos canais de cálcio, este fármaco faz aumentar o aporte de oxigénio ao miocárdio e simultaneamente diminui a necessidade geral de oxigénio no organismo. Isto é conseguido através da redução do batimento cardíaco e expansão do volume do sistema circulatório, o que, por sua vez, provoca uma diminuição da tensão arterial. Testes experimentais mostram que a meia-vida do referido medicamento, no interior do corpo humano, é de* 20 *horas. Admita que a taxa de absorção de um medicamento pelo organismo, num dado instante, é proporcional à quantidade de medicamento presente no organismo nesse instante.*
Supondo que uma certa dose é administrada de uma só vez a um paciente, escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação do medicamento no seu organismo e determine a constante de proporcionalidade. Determine a solução da equação diferencial.

Exercício 4.14. *Um estudante portador do vírus da gripe regressa a um colégio com* 1000 *alunos. Suponha que o colégio está isolado e que o vírus se propaga com uma taxa de variação proporcional não apenas ao número y de alunos já infectados mas também ao número de alunos não infectados.*

1. *Determine o número de alunos infectados após* 6 *dias, sabendo que passados* 4 *dias eles são já* 50.
2. *Calcule o valor limite da função $y(t)$, quando t tende para $+\infty$.*

Exercício 4.15. *No processo de conservação de alimentos o açúcar de cana passa por uma conversão na qual se transforma numa mistura de glucose e frutose.*
Sabe-se que numa solução diluída a taxa de conversão é proporcional à concentração $y(t)$ de açúcar não alterado. Sabendo que a dita concentração no instante inicial é igual a $1/50$ *e de* $1/200$ *ao fim de* 3 *horas, determine a concentração de açúcar alterado ao fim de 6 horas.*

Exercício 4.16. *Descobriu-se um osso fossilizado com* $1/1000$ *da quantidade original de carbono-14. Sabendo que a meia-vida do carbono-14 é de 5600 anos, determine a idade do fóssil. Admita que a taxa de desintegração (ou decaimento) do carbono-14 é proporcional à massa existente em cada instante.*

Exercício 4.17. *A população de um país foi de* 12,1 *milhões de habitantes em* 1996 *e de* 13,268 *milhões em* 2000. *Supondo que a taxa de crescimento é directamente proporcional ao tamanho da população, estime o tamanho da população em* 2005, 2006 *e* 2007.

Exercício 4.18. *Para que um fármaco possa ser devidamente administrado, é necessário que se conheça o modo como actua no organismo e, em particular, a forma como é absorvido. A relação dose/resposta do organismo, estabelece uma regra vital na determinaçao da quantidade a administrar em cada dose e do intervalo de tempo entre doses sucessivas.*
Testes experimentais a determinado tipo de antibióticos, permitiram concluir que a taxa de variação da concentração destes fármacos na corrente sanguínea, num determinado instante de tempo, é proporcional à sua concentração nesse mesmo instante. Suponha que $y(t)$ representa a concentração deste tipo de antibióticos no organismo (isto é, o número de unidades por mililitro de sangue) no instante t.

1. *Escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação destes antibióticos no organismo.*

2. *Há vários métodos para combater uma determinada infecção. Em situações graves é necessário um tratamento de choque, que consiste em administrar ao paciente várias doses, igualmente espaçadas no tempo, a primeira das quais já tem a concentração máxima requerida C_m e as seguintes permitem apenas corrigir desvios a este valor devidos à perda de concentração por eliminação.*

   (a) *Determine a concentração de antibiótico após um tempo prescrito T, depois da administração da primeira dose.*

   (b) *Se uma segunda dose é administrada nesse instante T, qual deve ser a sua concentração, de forma a repôr de imediato a concentração inicial C_m?*

   (c) *Supondo que este procedimento se repete nos instantes $2T$, $3T$, $4T$, faça um esboço do gráfico da função y no intervalo $[0, 4T]$.*

   (d) *Determine o tempo que decorre desde a administração da última dose até que 99% do medicamento desapareça da corrente sanguínea, sabendo que a sua meia-vida, enquanto no organismo, é de 30 minutos.*

Exercício 4.19. *Suponha que uma população y evolui de acordo com a equação logística*

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}05y - 0{,}005y^2,$$

onde t é medido em semanas. Determine a capacidade de suporte da população e valor da sua taxa de crescimento.

Exercício 4.20. *Suponha que o modelo de crescimento de uma população y é descrito pela equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3y}{20} - \frac{y^2}{1600}.$$

Considerando $y(0) = 15$, determine o número de indivíduos da população no instante $t = 10$.

Exercício 4.21. *Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.*

1. *Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.*
2. *Se $1/4$ da população está infectada num determinado instante $t = 0$, esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.*
3. *Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?*

Exercício 4.22. *Um modelo para o crescimento da biomassa (massa total dos membros da população) de atum do Pacífico, dada em quilogramas, é dado por*

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right), \tag{4.15}$$

onde t é medido em anos, $k = 0{,}71\%$ ao ano e a capacidade de suporte foi medida como sendo $S = 8 \times 10^7$ quilogramas.

1. *Se $y(0) = 2 \times 10^7$ quilogramas, calcule a biomassa um ano depois.*
2. *Quanto tempo levará a biomassa a alcançar 4×10^7 quilogramas?*

Exercício 4.23. *Seja y uma solução da equação logística (4.15).*

1. *Mostre que*
$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 y\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{2y}{S}\right).$$
2. *Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade da sua capacidade de suporte.*

Exercício 4.24. *Para algumas espécies existe uma população mínima m tal que as espécies se tornam extintas quando o tamanho da população é inferior a esse valor. Nesse caso, o modelo logístico deve ser substituído por*

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{m}{y}\right), \qquad y(0) = y_0.$$

1. *Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < y < S$ e decrescente se $0 < y < m$.*
2. *Resolva o problema de condição inicial.*
3. *Mostre que se $y_0 < m$ as espécies se tornarão extintas.*

Exercício 4.25. *Num modelo de crescimento sazonal, uma função periódica no tempo é introduzida para considerar as variações na taxa de crescimento. Esse modelo pode ser traduzido pelo problema de condição inicial*

$$\frac{dy}{dt} = ky\cos(rt - \phi), \qquad y(0) = 1,$$

onde k, r e ϕ são constantes positivas. Determine a solução do modelo de crescimento sazonal.

Exercício 4.26. *Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:*

1. $t\dfrac{dy}{dt} - 4y = t^6$;
2. $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t$;
3. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+t}{t}$;
4. $\dfrac{dy}{dt} = y + t$;
5. $dy + (y\cos x - e^{-\operatorname{sen} x})dx = 0$;
6. $t^2y' + t(t+2)y = e^t$;
7. $y' - \dfrac{1}{x}y = x + \dfrac{x}{1+x^2}$;
8. $t^2y' + t(t+3)y = e^{-t}$;
9. $y' + (\cos x)\,y = x^2\,e^{-\operatorname{sen} x}$.

Exercício 4.27. *Uma equação de Bernoulli (em homenagem a James Bernoulli (1654–1705)) é da forma*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

com n um número inteiro. Observe que, se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x).$$

Exercício 4.28. *Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:*

1. $xy' + y = -xy^2$;
2. $y' + y = xy^3$;
3. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$.

Exercício 4.29. *A Lei de Arrefecimento de Newton diz que taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considere uma esfera de metal aquecida a $100°$ e que é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 30°$. Ao fim de cinco minutos a temperatura da esfera desceu para $60°$. Determine:

1. *a temperatura da esfera ao fim de meia-hora;*
2. *o instante em que a temperatura da esfera atinge $31°$.*

Exercício 4.30. *Às 23 horas John foi encontrado morto no seu apartamento. Claxon chegou ao local do crime às 23h30m e tirou imediatamente a temperatura da vítima: $30°$. Uma hora depois, (às 0h30m) a temperatura do corpo era de $25°$. Claxon notou ainda que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a $20°$. A que hora ocorreu o crime?*

Exercício 4.31. *A Ana pesa 60 quilogramas e está a fazer uma dieta de 1600 calorias por dia, das quais 850 são usadas directamente no metabolismo basal. Mais, a Ana gasta cerca de 15 calorias por dia e por quilograma do seu peso a fazer exercício físico.*

1. *Supondo que um quilograma de gordura tem 10000 calorias e que a reserva de calorias na forma de gordura é 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a de forma a conhecer o peso da Ana em função do tempo.*
2. *Será que o peso da Ana vai chegar ao peso de equilíbrio?*

Exercício 4.32. *Um circuito eléctrico simples consiste num medidor de corrente eléctrica I (em amperes), uma resistência R (em ohms), um inductor L (em henries) e uma voltagem aplicada E (em volts). Pela segunda Lei de Kirchhoff, a corrente I satisfaz*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

1. *Determine a corrente I em função do tempo t (medido em segundos), sabendo que $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ V, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$ e $I(0) = 1$ A.*
2. *Calcule a corrente ao fim de 0,1 segundos.*

Exercício 4.33. *Em 1626 os índios Lenape venderam a ilha de Manhattan ao Director Geral da Companhia Holandesa das Índias Ocidentais e Colonização, o holandês Peter Minuit, por 60 florins em quinquilharia, o equivalente a 24 dólares. Se, nessa altura, os índios tivessem colocado o dinheiro a render a uma taxa de 6% ao ano, quanto dinheiro teriam agora?*

Exercício 4.34. *Um tanque contém 100 litros de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 Kg/L é adicionada a uma taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 L/min. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) ao fim de t minutos.*

1. *Tendo em conta que o volume do fluido no tanque não permanece constante ao longo do tempo, mostre que y satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100+2t}.$$

2. *Resolva a equação diferencial e calcule a concentração ao fim de 20 minutos.*

Exercício 4.35. *Considere o problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

Determine, usando o método de Euler progressivo, o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h = 1$, $h = 0{,}5$ e $h = 0{,}25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta é $y(t) = e^t$.

Exercício 4.36. *Considere o problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= -50y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

e o método de Euler. Determine a solução do problema em $t = 1$ com $h = 10^{-n}$, $n = 1, 2, 3$, comparando os resultados obtidos.

Exercício 4.37. *Aplique o método de Euler à resolução do problema de Cauchy*

$$y' = \sin t + y, \quad t \in]0,1], \quad y(0) = 0,$$

comparando os resultados obtidos com a solução exacta

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + \frac{1}{2}e^t.$$

Exercício 4.38. *Considere o problema de Cauchy*

$$y' = -te^{-y}, \quad t \in]0,1], \quad y(0) = 0.$$

Aplique o método de Euler com $h = 1/2, 1/2^2, ..., 1/2^{10}$, *e compare os resultados obtidos na alínea anterior com a solução exacta*

$$y(t) = \ln(1 - \frac{t^2}{2}).$$

Exercício 4.39. *Considere o problema de Cauchy*

$$y' = -10y, \quad 0 < t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

cuja solução é $y(t) = e^{-10t}$. *O que é que se passa quando se aplica um método de Euler com* $h = 0{,}1$*?*

Exercício 4.40. *Compare as soluções numéricas dos seguintes problemas com condição inicial:*

1. $y' = 1 - y, \quad 0 < t \leq 2, \quad y(0) = 0,$ *e* $y' = 1 - y + 0{,}1, \quad 0 < t \leq 2,$ $y(0) = 0{,}1$;

2. $y' = y, \quad 2 < t \leq 4, \quad y(2) = 0,$ *e* $y' = y + 0{,}01, \quad 2 < t \leq 4, \quad y(2) = 0{,}1.$

Exercício 4.41. *Consideremos um corpo pontual de massa* m *e temperatura interna* T *inserido num meio ambiente de temperatura constante* $T_a = 295$ *K. A transferência de calor entre o corpo e o exterior pode ser descrita pela lei de* Stefan-Boltzmann $v(t) = \sigma\gamma S(T^4(t) - T_a^4)$, *com* t *variável temporal,* σ *a constante de Stefan-Boltzmann* ($5{,}67 \times 10^{-8}$ $Jm^{-2}K^{-4}s^{-1}$), γ *constante de emissividade do corpo,* S *a área da sua superfície e* v *a velocidade de transferência de calor. A taxa de variação de energia* $E(t) = mCT(t)$ *(onde* C *designa o calor específico do material que constitui o corpo) é igual, em valor absoluto, à velocidade* v. *Por conseguinte, fazendo* $T(0) = T_0$, *o cálculo de* $T(t)$ *exige a resolução da equação diferencial ordinária*

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{v(t)}{mC}.$$

Suponha que o corpo em questão é um cubo de lado 1 m e massa 1 Kg, $T_0 = 275$ *K,* $\gamma = 0{,}5$ *e* $C = 100$. *Recorra a um método de Euler para comparar os resultados obtidos com* $h = 20, 10, 5, 1$, *para* t *a variar entre 0 e 200 segundos.*

Exercício 4.42. *Considere o seguinte problema de Cauchy*

$$y' = \lambda y, \quad t > 0, \quad y(0) = 1,$$

onde λ *é um número real negativo. A solução exacta é* $y(t) = e^{\lambda t}$ *que tende para zero quando* t *tende para infinito. Faça* $\lambda = -1$*. Represente graficamente, no intervalo [0,30], as soluções obtidas para três valores diferentes de h:* $h = 30/14$*,* $h = 30/16$ *e* $h = 1/2$*, usando o método de Euler.*

Exercício 4.43. *A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde T *e* T_a *são as temperaturas do corpo e do meio circundante, respectivamente, (em graus Celsius), e* k *é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considerando que uma esfera de metal aquecida a* $90^o C$ *é mergulhada em água mantida à temperatura constante de* $T_a = 20^o C$*, use um método numérico para calcular quanto tempo leva a esfera a arrefecer até aos* $30^o C$ *se* $k = 0{,}1$ min^{-1}*.*

Exercício 4.44. *Aproxime a solução do problema*

$$y'(t) = \text{arc tg}(3y) - 3y + t, \quad t > 0, \quad y(0) = 1$$

usando o método de Euler progressivo, com $h = 2/3$ *e* $h = 2/3 + 0{,}1$*. Comente os resultados obtidos.*

Exercício 4.45. *A função* $y(t)$ *indica a quantidade vendida de um determinado produto ao fim de* t *meses após ter sido introduzido no mercado. Suponha que* $y(t)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{t(t+1)}.$$

Ao fim do primeiro mês foram vendidas 1000 unidades daquele produto. A solução do problema é $y(t) = 4000t^2/(1+t)^2$*.*

1. *Aproxime a solução do problema durante o primeiro ano, usando o método de Euler.*

2. *Tendo em conta a evolução da venda do produto mensalmente durante o primeiro ano, aproxime o valor das vendas após 8 meses.*

Exercício 4.46. *Mostre que o problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= ty \\ y(0) &= 1 \end{cases},$$

para $t \in [0, T]$*, tem solução única.*

Exercício 4.47. *Determine a solução do sistema de equações diferenciais* $Y' = AY$ *no instante* $t = 1$, *com*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

usando o método de Euler com $h < 1$, *a partir da condição inicial* $Y(0) = (1, 0)$.

Exercício 4.48. *A equação de Van der Pol*

$$y'' - \mu\left(y^2 - 1\right) y' + y = 0,$$

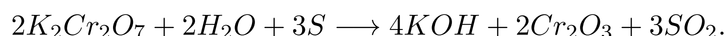
com $\mu > 0$, *é um modelo para o fluxo de corrente num tubo de vácuo com três elementos internos. Seja* $\mu = 0{,}5$ *e* $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. *Aproxime* y *e* y' *no intervalo temporal* $[0, 30]$ *usando o método de Euler. Repita o exercício considerando* $\mu = -1000$ *e* $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ *e o intervalo temporal* $[0, 3000]$.

Exercício 4.49. *Uma quantidade de* 10 *quilogramas de material é despejada num reservatório contendo* 60 *quilogramas de água. A concentração da solução, c (em percentagem), vem dada em função do tempo, t (em segundos), por*

$$(60 - 1{,}2112c)c' = \frac{k}{3}(200 - 14c)(100 - 4c),$$

onde k, *o coeficiente de transferência de massa, é igual a* 0,0589. *A condição inicial em* $t = 0$ *é* $c = 0$. *Determine a relação entre* c *e* t.

Exercício 4.50. *A equação química irreverssível na qual duas moléculas de dicromato de potássio* ($K_2Cr_2O_7$) *sólido, duas moléculas de água* (H_2O) *e três átomos de enxofre* (S) *sólido dão origem a três moléculas de dióxido de enxofre* (SO_2) *gasoso, quatro moléculas de hidróxido de potássio* (KOH) *sólido e duas moléculas óxido de crómio* (Cr_2O_3) *sólido pode ser representada, simbolicamente, pelo esquema*



$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2.$$

Se existirem inicialmente n_1 *moléculas de* $2K_2Cr_2O_7$, n_2 *moléculas de* H_2O *e* n_3 *moléculas de* S *a equação seguinte descreve a quantidade* $x(t)$ *de* KOH *ao fim de um tempo* t *(em segundos)*

$$x' = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3,$$

onde k *é a velocidade da reação (constante). Se* $k = 6{,}22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 1000$ *e* $n_3 = 1500$, *quantas unidades de hidróxido de potássio serão formadas ao fim de* 2 *segundos?*

Exercício 4.51. *Consideremos um pêndulo simples constituído por uma bola uniforme de massa m e uma barra fina de comprimento l e massa negligenciável. Se considerarmos que a resistência do ar é porpocional ao quadrado da velocidade angular do pêndulo, a equação do movimeto é dada por*

$$\theta'' + 2k\left(\theta'\right)^2 = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta,$$

sendo θ o ângulo agudo que a barra do pêndulo faz com a vertical. Considerando que em $t = 0$ se tem $\theta = \frac{\pi}{3}$ determine o valor de θ e de θ' nos instantes (em minutos) $t_i = ih$, com $h = 0{,}05$ e $i = 0, 1, \ldots, 50$.

Exercício 4.52. *O estudo de modelos matemáticos para estimar a evolução de uma população de espécies que competem entre si teve a sua origem no início do século com os trabalhos de A.J. Lotka e V. Volterra. Consideremos o problema de estimar a população constituida por duas espécies, uma das quais é predadora, cuja população no instante t é $x_2(t)$, e que se alimenta comendo a outra espécie, a que chamamos presa e cuja população é $x_1(t)$. Este problema é usualmente designado por* predador-presa. *Vamos assumir que a presa possui sempre uma quantidade de comida adequada e que a sua taxa de natalidade em todos os instantes é proporcional ao número de presas vivas nesse instante; isto é, a taxa de natalidade (presa) é dada por $k_1x_1(t)$. A taxa de mortalidade das presas depende tanto do número de presas como de predadores vivos nesse instante. Por uma questão de simplicidade vamos assumir que a taxa de mortalidade (presa) é $k_2x_1(t)x_2(t)$. A taxa de natalidade dos predadores, por outro lado, depende da quantidade de comida existente, $x_1(t)$, assim como do número de predadores existentes para fins de reprodução. Por essas razões vamos assumir que a taxa de natalidade (predador) é $k_3x_1(t)x_2(t)$. A taxa de mortalidade dos predadores será tomada proporcionalmente ao número de predadores vivos nesse instante; isto é, a taxa de mortalidade (predador) é dada por $k_4x_2(t)$.*
A variação da população de presas e predadores pode ser dada pelas seguintes equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1'(t) &= k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \\ x_2'(t) &= k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t) \end{cases}.$$

Assumindo que a população inicial de presas é 1000 e a de predadores 200, e que as constantes $k_1 = 3$, $k_2 = 0{,}002$, $k_3 = 0{,}0006$ e $k_4 = 0{,}5$, trace o gráfico das soluções deste problema e descreva o fenómeno físico representado. Será que o problema possui alguma solução estável? Se sim, para que valores de x_1 e x_2 é que tal acontece?

Exercício 4.53. *Num livro intitulado 'Looking at History Through Mathematics', MIT Press, Cambridge MA, 1968, N. Rashevsky considerou um modelo para um problema envolvendo o evolução de não conformistas na sociedade. (Conformista é a pessoa que adopta ou segue o conformismo (anglicanismo).). Suponhamos que uma sociedade tem uma população de* $x(t)$ *indivíduos no instante* t*, em anos, e que todos os não conformistas que acasalam com outros não conformistas têm uma descendência que também é não conformista. Por outro lado, para todas as outras descendências, existe uma proporção fixa* r *que são ainda não conformistas. Se as taxas de natalidade e mortalidade para todos os indivíduos se assumir como sendo as constantes* n *e* m*, respectivamente, e se conformistas e não conformistas acasalarem de forma aleatória, o problema pode ser expresso pelas equações diferenciais*

$$\begin{cases} x'(t) &= (n-m)x(t) \\ y'(t) &= (n-m)y(t) + rn(x(t)-y(t)) \end{cases},$$

onde $y(t)$ *denota o número de não conformistas na população no instante* t*.*

1. *Se a variável* $p(t) = y(t)/x(t)$ *for introduzida para representar a proporção de não conformistas na sociedade no instante* t*, mostre que o sistema de equações diferenciais se reduz a*
$$p'(t) = rn(1-p(t)).$$

2. *Assumindo que* $p(0) = 0{,}01$*,* $n = 0{,}002$*,* $m = 0{,}015$ *e* $r = 0{,}1$*, aproxime a solução* $p(t)$ *para os primeiros* 50 *anos.*

3. *Resolva a equação diferencial para* $p(t)$ *de forma exacta, e compare o resultado com a solução numérica.*

Bibliografia

Bibliografia base

[1] James Stewart, *Cálculo*, vol. I e II, 6ª edição, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2006.

Bibliografia complementar

[2] Adérito Araújo, *Matemática Computacional*, Notas de apoio às aulas, FCTUC, 2017.

[3] Tom M. Apostol, *Cálculo*, Vol. I, Vol. II. Reverté, 1994.

[4] Jaime Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1993.

[5] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, vol. 1 (11ª edição), Projecto Euclides, IMPA, 2004.

[6] João José Pedroso Lima, Francisco José Amado Caramelo, Jorge Miguel Couceiro, Rosa da Conceição Reis & Francisco Alte da Veiga, *Biomatemática. Uma introdução para o curso de Medicina*, 2ª edição, Imprensa da Universidade de Coimbra, 2006.

[7] Mário Figueira, *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, 5ª edição, FCUL, 2011.

[8] Jerrold Marsden & Alan Weinstein, *Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[9] Carlos Sarrico, *Análise Matemática*, Gradiva, Lisboa, 1997.

[10] George F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

[11] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd Edition, Cambridge University Press, 2006.

[12] Gilbert Strang, *Calculus*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 1991.

[13] Earl W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. I e II, McGraw-Hill, São Paulo, 1987.

[14] Dennis G. Zill, *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*, Thomson Learning, São Paulo, 2003.

Apêndice A

Tabela de primitivas imediatas

Função	Primitiva
a	$ax + C$
$f^m \; f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C \; (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$a^f \; f'$	$\dfrac{a^f}{\ln a} + C \; (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Funções trigonométricas	
Função	Primitiva
$f' \;\operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
$f' \;\cos f$	$\operatorname{sen} f + C$
$f' \;\operatorname{tg} f$	$-\ln\lvert\cos f\rvert + C$
$f' \;\operatorname{cotg} f$	$\ln\lvert\operatorname{sen} f\rvert + C$
$f' \;\sec f$	$\ln\lvert\sec f + \operatorname{tg} f\rvert + C$
$f' \;\operatorname{cosec} f$	$\ln\lvert\operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f\rvert + C$
$f' \;\sec^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
$f' \;\operatorname{cosec}^2 f$	$-\operatorname{cotg} f + C$
$f' \;\sec f \;\operatorname{tg} f$	$\sec f + C$
$f' \;\operatorname{cosec} f \;\operatorname{cotg} f$	$-\operatorname{cosec} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cos} f + C$
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc\,tg} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cotg} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arc\,sec} f + C$ ou $-\operatorname{arc\,cosec} f + C$

Funções hiperbólicas	
Função	Primitiva
$f' \;\operatorname{sh} f$	$\operatorname{ch} f + C$
$f' \;\operatorname{ch} f$	$\operatorname{sh} f + C$
$f' \;\operatorname{th} f$	$\ln(\operatorname{ch} f) + C$
$f' \;\coth f$	$\ln\lvert\operatorname{sh} f\rvert + C$
$f' \;\operatorname{sech}^2 f$	$\operatorname{th} f + C$
$f' \;\operatorname{cosech}^2 f$	$-\coth f + C$
$f' \;\operatorname{sech} f \;\operatorname{th} f$	$-\operatorname{sech} f + C$
$f' \;\operatorname{cosech} f \;\coth f$	$-\operatorname{cosech} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\arg\operatorname{sh} f + C$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\arg\operatorname{ch} f + C$
$\dfrac{f'}{1-f^2}$	$\arg\operatorname{th} f + C,\; \lvert f\rvert < 1,$ $\arg\coth f + C,\; \lvert f\rvert > 1$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1-f^2}}$	$-\arg\operatorname{sech} f + C$
$\dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{1+f^2}}$	$\arg\operatorname{cosech} f + C$